Obsah

Kapitola 1

Řešení soustav lineárních rovnic, vektorový prostor

1.1 Přesné zadání

- Řešení soustav lineárních rovnic
- Gaussův eliminační algoritmus
- Vektorový prostor
- Řešení homogenní soustavy
- Lineární závislost a nezávislost vektorů
- Báze vektorového prostoru

1.2 Soustava lineárních rovnic

Soustava `m` lineárních rovnic o `n` neznámých se znázorňuje následovně.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{1.1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \tag{1.2}$$
$$\vdots \tag{1.3}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \tag{1.4}$$

Často se tato soustava zapisuje v maticovém tvaru.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T \tag{1.5}$$

A je matice soustavy s rozměry (m,n), **x** je vektor neznámých a **b** je vektor pravých stran. Řešením soustavy se rozumí takový vektor, který po dosazení dá identitu. Soustavy rovnic se dělí podle vektoru pravých stran. Pokud je to nulový vektor, tak soustava rovnic je homogenní. Pokud je to nenulový vektor, tak soustava rovnic je nehomogenní. Pokud se matice soustavy doplní o vektor pravých stran, tak se to nazývá rozšířená matice. Soustava lineárnách rovnic může mít 0, 1 nebo ∞ řešení.

1.3 Gaussův eliminační algoritmus

Řešení soustavy lineárních rovnic se provádí pomocí úpravy matice soustavy. Na její úpravu se používá numerická metoda Gaussova eliminace. Cílem je úprava matice na horní trojúhelníkovou matici, která má všechny členy pod hlavní diagonálou nulové. Povolené operace jsou takové, které nemění hodnost matice a tedy charakter řešení. Operace jsou následující [1].

- přehození pořadí řádků
- násobení řádku skalárem
- přičtení lineární kombinace řádků k jinému řádku
- vynechání nulového řádku
- vynechání řádku, který je lineární kombinací jiných řádků

Soustava rovnic, která má horní trojúhelníkovou matici, se snadno řeší zpětným dosazováním.

1.4 Vektorový prostor

Ve vektorovém prostoru se definují dvě základní operace s vektory: binární operace součtu vektorů a unární operace násobení vektoru skalárem. Aby vektory tvořily vektorový prostor, tak musí splňovat následujících sedm axiomů.

- komutativnost součtu $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- asociativnost součtu $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
- asociativnost násobení skalárem $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
- 1. distributivní zákon $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
- 2. distributivní zákon $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
- vlastnost jedničky $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
- vlastnost nuly $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Ve vektorových prostorech lze vytvářet jeho podmnožiny, které se nazývají vektorové podprostory, pokud splňují vlastnosti.

- uzavřenost na součet $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$
- uzavřenost na skalární násobek $\mathbf{x} \in M \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in M$

1.5 Řešení soustav

Homogenní soustava má nulový vektor pravých stran. Má vždy řešení. Pokud je řešení jediné, tak je triviální, protože platí.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{o}^T \Rightarrow \mathbf{x}^T = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{o}^T = \mathbf{o}^T \tag{1.6}$$

Inverzní matice existuje pouze k regulární matici, a pak řešení musí být jednoznačné. Dále může mít soustava ∞ řešení. To se stane, pokud se při Gaussově eliminaci podaří snížit počet řádků tak, aby jich bylo méně než neznámých. Potom se při výpočtu může libovolně volit (n - k) neznámých, kde n je hodnost matice a k je počet řádků matice po Gaussově eliminaci. Jelikož se

[1] Jsou použitelné i pro sloupce

neznámé volí libovolně, tak je logicky ∞ možných řešení. Množina řešení homogenní soustavy tvoří vektorový prostor. Nehomogenní soustavy rovnic mají nenulový vektor pravých stran. Může mít 0, 1 nebo ∞ řešení. Pokud hodnost rozšířené matice se nerovná hodnosti přidružené homogenní matice, tak podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení. Pokud je splněna, tak řešení je součtem řešení přidružené homogenní soustavy a libovolného partikulárního řešení nehomogenní soustavy. Pokud má homogenní soustava ∞ řešení, tak ho má i nehomogenní soustava. Pokud má homogenní soustava pouze triviální řešení, tak nehomogenní soustava má jeřnoznačné řešení. Určí se vynásobením vektoru pravých stran inverzní maticí nebo pomocí Cramerova pravidla

$$x_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}} \tag{1.7}$$

Počítají se zde determinanty. V matici v čitateli je i-tý sloupec nahrazen vektorem pravých stran. Získáme tak řešení pro i-tou neznámou.

1.6 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Pro posouzení této závislosti se zavádí pojem lineární kombinace vektorů.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \tag{1.8}$$

Výsledkem lineární kombinace je vždy nějaký vektor a v tomto případě nás zajímá nulový vektor. Lineární kombinace nezávislých vektorů, která dává nulový vektor je vždy triviální. To znamená, že všechny váhy α_i jsou nulové. V případě lineárně závislých vektorů se dá najít netriviální lineeární kombinace, která dává nulový vektor.

1.7 Báze vektorového prostoru

Při hledání všech prvků vektorového podprostoru se zavádí pojem lineární obal. Je to množina všech lineárních kombinací. Libovolný vektor v podprostoru je tedy určen pomocí určité množiny význačných vektorů. Tyto vektory musí být lineárně nezávislé a současně jich je minimální počet tak, aby plně generovaly podprostor. Taková nejmenší množina lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinace tvoří lineární obal se nazývá báze. Počet vektorů určuje dimenzi prostoru. Libovolný vektor je potom určen jejich lineární kombinací jednoznačně a příslušné koeficienty se nazývají souřadnice vektoru v bázi.

1.8 Literatura

[1] Demlová M., Pondělíček B., Úvod do algebry, skriptum FEL ČVUT, 2000

Kapitola 2

Matice

2.1 Přesné zadání

- Matice a základní operace s maticemi
- Hodnost matice a Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic
- Inverzní matice a determinant
- Lineární zobrazení a jeho matice v dané bázi

2.2 Matice a základní operace

Matice je pomůcka používaná pro řešení soustav lineárních rovnic a reprezentujeme ji tabulkou.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Tato matice má m řádků a n sloupců. Pokud m = n, tak se matice nazývá čtvercová. Dále v matici rozlišujeme řádkové a sloupcové vektory. S maticemi se dají provádět různé operace.

- rovnost matic $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ - dvě matice se rovnají, pokud se rovnají prvky na všech pozicích
- součet matic $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ - nová matice má stejné rozměry a sčítají se prvky na stejných pozicích
- skalární násobek matice $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$ - všechny prvky se násobí skalárem. Pokud se matice násobí (-1), tak se definuje rozdíl matic.

Další operace již nejsou tak jednoduché a zaslouží si větší pozornost. Při násobení matic se nenásobí prvky na stejných pozicích, jako tomu je u součtu.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{2.2}$$

Tento vzorec lze interpretovat takto. Prvek na pozici (i,k) vznikne násobením i-tého řádku a k-tého sloupce člen po členu a součtem těchto násobků. Z definice vyplývá, že počet sloupců první matice a počet řádků druhé matice se musí rovnat. Výsledná matice má tedy počet řádků jako první matice a počet sloupců jako druhá matice tj. $(i,j)\cdot(j,k)=(i,k)$. Násobení matic obecně není komutativní a záleží na pořadí. Asociativní a distributivní zákon platí. Matice se dají také dělit, ale tomu je věnována část o inverzních maticích. Další významnou operací je transpozice.

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^T, b_{ij}=a_{ji} \tag{2.3}$$

Interpretace definice je jasná. Řádky původní matice se napíší do sloupců a sloupce naopak do řádků. Je jasné, že prvky na diagonále se nijak nezmění.

2.3 Hodnost matice a Frobeniova věta

Při řešení soustav lineárních rovnic se využívá hodnosti matice. Řádky matice jsou vektory a určují vektorový prostor. Hodnost je potom dimenze tohoto prostoru. Stačí tedy najít bázi prostoru generovaného řádkovými vektory a jejich počet určuje dimenzi. Bázové vektory jsou lineárně nezávislé a dají se najít pomocí Gaussovy eliminace. Takovými úpravami se nezmění hodnost matice. Hodnost matice se uplatní ve Frobeniově větě, která pomůže při určení řešení soustavy lineárních rovnic.

- hod $\mathbf{A}$ = hod $(\mathbf{A}$—$\mathbf{b}) \Longrightarrow$ soustava má 0 nebo ∞ řešení
- hod $\mathbf{A} \neq$ hod$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \Longrightarrow$ soustava nemá řešení

Aby soustava měla řešení, tak vektor pravých stran musí vzniknout lineární kombinací vektorů neznámých. Musí na nich tedy záviset. Pokud se hodnosti homogenní a rozšířené matice nerovnají, tak vektor pravých stran není závislý a soustava nemůže mít řešení.

2.4 Inverzní matice a determinant

Inverzní matice reprezentuje operaci dělení matic. V případě reálných čísel je součin čísla a čísla inverzního roven jedničce. Pro matice platí analogie

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} \tag{2.4}$$

E je jednotková matice, která má na diagonále jedničky a jinde nuly. Násobení matice a její inverze je komutativní a zároveň je inverzní matice jednoznačně určená. Protože jednotková matice je čtvercová, tak pouze čtvercové matice mohou mít inverzi. Inverzní matice se dá najít pomocí dvou metod. Ta první spočívá v provádění řádkových nebo sloupcových operací na původní matici tak, aby vznikla jednotková matice. Každá řádková úprava se dá interpretovat jako násobení zleva určitou maticí a sloupcová úprava jako násobení zprava. Takové matice se nazývají elementární transformační matice.

$$\mathbf{X}_n\cdots\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{A}=\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \tag{2.5}$$

Prakticky se to realizuje takto. Vedle sebe se napíší původní a jednotková matice. Řádkové úpravy se provádějí současně na obě matice. Jakmile se původní matice transformuje na jednotkovou, tak jednotková se transformuje na inverzní.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}]\Longrightarrow[\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}] \tag{2.6}$$

Druhá metoda již není tak průhledná, ale má význam při numerických výpočtech. Nalezne se transponovaná matice doplňků a dělí se determinantem původní matice.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}[D_{ij}]^T \tag{2.7}$$

Matice doplňků se najde takto. V matici se vynechá i-tý řádek a j-tý sloupec a ze zbytku se určí determinant, který se násobí členem $(-1)^{i+j}$. Jelikož determinant je nenulový pouze pro regulární matice, tak platí, že ne všechny čtvercové matice mají inverzi. Determinant je pouze určitá pomůcka. Jeho definice je nenázorná, a proto se uvádějí vzorce pro výpočet matic řádu dvě a tři.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.8}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2.9}$$

Pro výpočet determinantu matic vyššího řádu se používá rozvoj matice podle řádku nebo sloupce. Princip je uveden na příkladu matice řádu tři podle prvního sloupce.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}\det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

2.5 Lineární zobrazení

Zobrazení je určitá trensformace, která vektor změní na jiný vektor obecně jiného rozměru. Zobrazení je lineární, pokud platí.

$$A[\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = \alpha A[\mathbf{x}] + \beta A[\mathbf{y}] \tag{2.11}$$

Důležitým typem zobrazení je izomorfismus, které je bijektivní čili prosté na. Původní vektorový prostor i jeho obraz, pak mají stejnou dimenzi. Další důležitý pojem je jádro zobrazení **Ker** A. To je množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. V případě izomorfismu patří logicky do jádra pouze nulový vektor. Lineární zobrazení lze intepretovat jako násobení vektoru nějakou maticí, která se nazývá matice lineárního zobrazení. Její význam bude ilustrován na příkladu.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Toto zobrazení transformuje trojrozměrný vektor na dvojrozměrný. Původní vektor je určen souřadnicemi v kanonické bázi. Transformace mu přiděluje nové souřadnice v nové bázi. To lze intepretovat jako změnu bázových vektorů na jinou bázi. První sloupec matice reprezentuje souřadnice obrazu prvního bázového vektoru v nové bázi atd.

2.6 Literarura

[1] Demlová M., Pondělíček B., Úvod do algebry, skriptum FEL ČVUT, 2000

Kapitola 3

Posloupnosti a číselné řady

3.1 Přesné zadání

- Posloupnosti reálných a komplexních čísel
- Vztah omezenosti a konvergence posloupnosti
- Číselné řady a kritéria pro absolutní konvergenci.

3.2 Posloupnosti

Reálná posloupnost je zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel. V podstatě je to řada čísel, které jsou reálné. Přirozené číslo určuje pořadí prvku posloupnosti. Komplexní posloupnost je zobrazení přirozených čísel do množiny komplexních čísel. Každé komplexní číslo se skládá z reálné a imaginární části, které jsou již reálné. Části lze vyšetřovat odděleně a redukovat tak případ na reálné posloupnosti. Mezi základní vlasstnosti posloupností patří monotonie a ohraničenost.

- ryzí monotonie - $a_{n+1} > a_n$ rostoucí
  $a_{n+1} < a_n$ klesající
- monotonie - $a_{n+1} \geq a_n$ neklesající
  $a_{n+1} \leq a_n$ nerostoucí
- ohraničenost - $a_n \leq A$ shora ohraničená
  $a_n \geq A$ zdola ohraničená

Posloupnost, která je ohraničená shora i zdola se nazývá omezená. Pokud by platily pouze ostré nerovnosti, tak se A nazývá supremum resp. infimum.

3.3 Konvergence

U posloupností se často zkoumá, jak se chovají hodně vysoké členy posloupnosti. Rozeznáváme tři případy.

- konvergentní - členy posloupnosti se blíží k nějakému číslu
- divergentní - členy posloupnosti se blíží k $+\infty$ nebo k $-\infty$
- oscilující - členy posloupnosti střídají znaménko a neblíží se žádnému číslu

Posloupnost, která je konvergentní má limitu. Potom se členy téměř rovnají limitě.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Konvergentní posloupnosti jsou vždy ohraničené, ale naopak to obecně neplatí. Existuje speciální skupina ohraničených posloupnosí, které jsou vždy konvergentní. Platí to pro monotónní posloupnosti. Pro limity platí důležité věty, které pomáhají při výpočtech.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \tag{3.4}$$

Aby byla posloupnost konvergentní, tak musí logicky mít jednu limitu. Někdy bývá složité nalézt limitu a stačí třeba pouze zjistit, zda je posloupnost konvergentní. Lze využít Bolzano-Cauchyovu podmínku.

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \tag{3.5}$$

To znamená, že členy posloupnosti jsou téměř konstatntní.

3.4 Číselné řady

Číselnou řadou se rozumí výraz.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.6}$$

V podstatě je to součet nekonečně mnoha členů. Pokud se sečte n členů, tak to nazýváme n-tý částečný součet řady. Pomocí něj se interpretuje konvergence řady. Řada konverguje, pokud konverguje posloupnost částečných součtů. To se ověřuje pomocí nutné podmínky konvergence.

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 = s_n - s_{n-1} \Rightarrow a_n = 0 \tag{3.7}$$

Pokud se k řadě příčítá nulový člen, tak logicky konverguje. Tato podmínka ale není postačující, protože v harmonické řadě platí $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ a přesto řada diverguje. Pro zjišťování konvergence platí různá kritéria. Následující se budou týkat řad s nezápornými členy.
Srovnávací kritérium. Pro členy řad platí $a_n \leq b_n$.

- Pokud konverguje řada s b_n, tak konverguje i řada s a_n.
- Pokud diverguje řada s a_n, tak diverguje i řada s b_n.

Podílové D´Alembertovo kritérium. Platí $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = A$.

- Pokud $A < 1$, tak řada konverguje.
- Pokud $A > 1$, tak řada diverguje.
- Pokud $A = 1$, tak nelze o charakteru rozhodnout.

Odmocninové Cauchyovo kritérium. Platí $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = A$.

- Pokud $A < 1$, tak řada konverguje.
- Pokud $A > 1$, tak řada diverguje.

- Pokud $A = 1$, tak nelze o charakteru rozhodnout.

Integrální kritérium. Vychází z toho, že členy a_n jsou diskrétními hodnotami nějaké reálné funkce. Nekonečná řada je diskrétní verzí integrálu. Pokud platí $\int_1^\infty f(x)\mathrm{dx} = A$, tak řada konverguje.
Tato kritéria platila pro řady s nezápornými členy, ale existují i řady, u kterých se znaménka členů mění. I pro ně se dají kritéria využít. V takovém případě se vyšetřuje absolutní konvergence řady, u které se všechny členy vyskytují v absolutní hodnotě. Platí totiž věta, že absolutně konvergentní řada konverguje i neabsolutně. Obráceně to neplatí. Současně se u takových řad dá změnit pořadí členů a součet se nezmění. U neabsolutně konvergentních řad se dají přerovnáním získat různé součty. Další kritérium se týká alternujících řad, u kterých se pravidelně střídají znaménka členů.
Leibnizovo kritérium. Pokud platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} a_n$.

3.5 Literatura

[1] Jankovský Z., Průcha L., Diferenciální počet I, skriptum FEL ČVUT, 2000

Kapitola 4

Limita a derivace

4.1 Přesné zadání

- Funkce jedné proměnné, limita a spojitost
- Derivace, její vlastnosti a význam
- Souvislost derivace s průběhem funkce
- Lokální a globální extrémy

4.2 Funkce reálné proměnné

Reálná funkce je zobrazení množiny reálných čísel do množiny reálných čísel. To znamená, že reálnému číslu je přiděleno jisté reálné číslo. V souvislosti s tímto zobrazením se zavádějí pojmy definiční obor a obor hodnot. **Definiční obor** je množina čísel, které chceme zobrazit. **Obor hodnot** je možina čísel, na které se zobrazí definiční obor. Základní vlastnosti funkcí jsou tyto.

- ryzí monotonie - funkce je rostoucí, pokud platí $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
  - funkce je klesající, pokud platí $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- monotonie - funkce je neklesající, pokud platí $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
  - funkce je nerostoucí, pokud platí $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
- omezenost - funkce je omezená shora, pokud $f(x) \leq A$. V případě ostré nerovnosti se toto číslo nazývá supremum.
  funkce je omezená zdola, pokud $f(x) \geq A$. V případě ostré nerovnosti se toto číslo nazývá infimum. Funkce, která je omezená shora i zdola, se nazývá omezená.
- symetrie - funkce je sudá, pokud $f(x) = f(-x)$. Graf funkce je symetrický podle osy y.
  funkce je lichá, pokud $-f(x) = f(-x)$. Graf funkce je symetrický podle počátku soustavy souřadnic.
- periodicita - funkce je periodická, pokud $f(x) = f(x + kp)$, kde p je perioda.

Zobrazení může být vícenásobné. Nejprve můžeme definovat nějakou funkci, která může být definičním oborem nějaké další funkce. Takové funkce se nazývají složené a skládají se z vnější a vnitřní funkce.

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \tag{4.1}$$

U takových funkcí mohou nastat potíže při určování definičního oboru. Pokud by vnější funkcí byla sinusovka a vnitřní funkcí byl logaritmus, tak definiční obor budou pouze kladná čísla, přestože sinusovka je definovaná pro všechna reálná čísla. Dále je možné definovat inverzní zobrazení $x = f^{-1}(y)$ na intervalu, na kterém je funkce ryze monotónní. Tam existuje inverzní funkce, která monotonii zachovává.

4.3 Limita a spojitost

Tato část se věnuje studiu chování funkce na malém okolí bodu. Zavádí se pojem **limita** a funkce má limitu v bodě a , pokud platí.

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.2}$$

Pokud jsou body na ose x velmi blízko sebe, tak i jejich funkční hodnoty jsou velmi blízké. Ukazuje to číslo, ke kterému se blíží sousední funkční hodnoty. Nic to neříká o tom, co se děje v bodě a. Funkce tam vůbec nemusí být definovaná. Pokud tam definovaná je, tak se zavádí pojem **spojitost** v bodě.

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

Limita a spojitost jsou velmi blízké pojmy. Pokud je funkce spojitá v bodě, tak její limita v bodě je rovna funkční hodnotě v bodě.

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a) \tag{4.4}$$

Pro limity a spojitosti platí některé početně významné vlastnosi. Limita součtu, součinu, podílu je rovna součtu, součinu, podílu limit. Součet, součin, podíl spojitých funkcí je také spojitá funkce. Následující vlastnosti už nejsou tak elementární. Všechny elementární funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité. Funkce, která je na uzavřeném intervalu spojitá, dosahuje na intervalu maxima a minima a také všech hodnot mezi. Definici limity a spojitosti lze zobecnit, pokud záleží na směru, ve kterém se k bodu blížíme. Rozeznává se pak limita a spojitost zleva a zprava.

4.4 Derivace

Derivace se definuje pomocí limity funkce.

$$f^{'}(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{4.5}$$

Kdyby tam nebyla limita, tak je to obyčejná směrnice sečny, která prochází body x, a. Jelikož se x přibližuje bodu a, tak vzdálenost mezi body klesá. V limitním případě body splývají a sečna tak přechází v tečnu. Derivace tak je jakousi lineární aproximací funkce v bodě. Derivace elementárních funkcí jsou v tabulkách a u složitějších funkcí se používají tyto metody.

- derivace součtu - $[f(x) \pm g(x)]^{'} = f^{'}(x) \pm g^{'}(x)$
- derivace součinu - $[f(x) \cdot g(x)]^{'} = f^{'}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{'}(x)$
- derivace podílu - $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{'} = \frac{f^{'}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g^{'}(c)}{[g(x)]^2}$
- derivace složené funkce - $(g(f(x))^{'} = g^{'}(y) \cdot f^{'}(x)$

Nyní si uvedeme některé základní věty diferenciálního počtu, které mají význam v aplikacích.
Rolleova věta. Funkce, která je na uzavřeném intervalu $< a, b >$ spojitá, na otevřeném intervalu má derivaci a krajní body mají stejnou funkční hodnotu $f(a) = a(b)$, tak v některém vnitřním bodě má nulovou derivaci. Pokud je derivace nulová, tak i směrnice tečny je nulová čili tečna je rovnoběžná s osou x. V takovém bodě má funkce maximum nebo minimum.

Lagrangeova věta. Má téměř stejné přepodklady jako Rolleova věta. Pouze se nevyžaduje rovnost funkčních hodnot v krajních bodech. Potom v nějakém vnitřním bodě platí. $f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b-a)$. Mezi body a,b se vede sečna. Věta říká, že tečna v nějakém vnitřním bodě je se sečnou rovnoběžná. Graf funkce mezi body a,b se dá aproximovat přímkou a přírůstek funkce bude stejný.
L´Hospitalovo pravidlo. Tato věta pomáhá při výpočtu limit, které vedou na neurčité výrazy $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$. Existují i jiné neurčité výrazy, které se pomocí jistých triků dají převést na tyto případy.
Taylorova řada. $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^(k)(a)}{k!}(x-a)^k$. Taylorova řada umožňuje aproximaci funkce polynomem n-tého řádu. Pokud bude řád 1, tak se funkce aproximuje přímkou a dostáváme se k Lagrangeově větě.

4.5 Derivace a průběh funkce

Derivace se dá využít k analýze průběhu funkce. První derivace slouží ke studiu monotonie a lokálních extrémů.

- $f^{'}(x) > 0$ - V intervalu, na kterém toto platí, je funkce rostoucí
- $f^{'}(x) < 0$ - V intervalu, na kterém toto platí, je funkce klesající
- $f^{'}(x) = 0$ - Stacionární bod, ve kterém funkce může mít extrém.

Funkce může mít extrém ještě v bodě, ve kterém nemá derivaci např: absolutní hodnota. Derivace může být nulová a přesto tam není extrém např: kubická funkce. Druh extrému lze určit podle monotonie funkce okolo něj. Maximum nastává, pokud funkce vlevo roste a vpravo klesá. Minimum nastává, pokud funkce vlevo klesá a vpravo roste. Ke studiu průběhu funkce se využívá i druhá derivace.

- extrémy - $f^{'}(x) = 0, f^{''}(x) < 0$ maximum
  $f^{'}(x) = 0, f^{''}(x) > 0$ minimum
- vypuklost funkce - $f^{''}(x) > 0$ v intervalu, na kterém toto platí, je funkce konvexní
  $f^{''}(x) < 0$ v intervalu, na kterém toto platí, je funkce konkávní
- inflexní bod - $f^{''}(x) = 0$ bod, ve kterém funkce může mít inflexi

Z nulové druhé derivace jednoznačně neplyne, že tam je inflexe např: parabola čtvrtého řádu. Aby tam byl, tak funkce se musí měnit z konvexní na konkávní nebo naopak. Další vlastností, která se na funkcích zkoumá je její asymptotické chování. V takových případech se funkce kolem nějakého bodu nebo v nekonečnu dá aproximovat přímkou bez výrazné ztráty přesnosti.

- svislá asymptota - pokud v nějakém bodě a, se funkce limitně blíží k $\pm\infty$, tak ji lze aproximovat přímkou $x = a$
- vodorovná asymptota - pokud se funkce v $\pm\infty$ limitně blíží k nějakému číslu a, tak ji lze aproximovat přímkou $y = a$
- šikmá asymptota - pokud platí tyto tři podmínky,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = q \tag{4.6}$$

  tak se funkce dá aproximovat přímkou $y = kx + q$

4.6 Lokální a globální extrémy

Přes první derivace dokážeme najít pouze lokální extrémy. Funkce se však vždy vyšetřuje na nějakém intervalu. V krajních bodech intervalu se derivace neurčuje. Bývá zajímavé určit bod, ve kterém funkce nabývá své maximální nebo minimální hodnoty. Takové body se nazývají globální extrémy. Ty se najdou takto. Přes první derivaci se najdou lokální extrémy a ty se porovnají s funkčními hodnotami v krajních bodech intervalu.

4.7 Literatura

[1] Jankovský Z., Průcha L., Diferenciální počet I, skriptum FEL ČVUT, 2000

Kapitola 5

Integrál

5.1 Přesné zadání

- Primitivní funkce a určitý integrál
- Metody výpočtu: substituce a per partes
- Užití a význam integrálu

5.2 Primitivní funkce

Integrace se zavádí jako operace inverzní k derivaci. Je zadána nějaká funkce a máme najít funkci, která po zderivování dá funkci zadanou. Taková funkce se nazývá primitivní funkce a definuje se vždy nanějakém intervalu.

$$F^{'}(x) = f(x) \tag{5.1}$$

Z této definice jasně plyne, že primitivní funkce není určena jednoznačně. Můžeme přičíst libovolnou konstantu, která po derivování vymizí. K funkci tedy existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší o aditivní konstantu. Proces hledání primitivní funkce se nazývá výpočet neučitého integrálu.

$$\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + c \tag{5.2}$$

Integrace je lineární operací čili platí.

$$\int (af(x) + bg(x))\mathrm{dx} = a\int f(x)\mathrm{dx} + b\int g(x)\mathrm{dx} \tag{5.3}$$

Jelikož je integrace definována jako operace inverzní k derivování, tak se snadno dají odvodit základní integrály, které jsou v tabulkách. Pro řešení složitějších integrálů jsou určeny různé metody.

5.3 Metody výpočtu integrálů

Velmi jednoduchou metodou je metoda per partes, která vyplývá z derivace součinu funkcí.

$$\int u(x)v^{'}(x)\mathrm{dx} = u(x)v(x) - \int u^{'}(x)v(x)\mathrm{dx} \tag{5.4}$$

$$(u(x)v(x))^{'} = u^{'}(x)v(x) + u(x)v^{'}(x) \Rightarrow u(x)v(x) = \int u^{'}(x)v(x)\mathrm{dx} + \int u(x)v^{'}(x)\mathrm{dx} \tag{5.5}$$

Tato metoda je užitečná, pokud jednu funkci dokážeme derivovat a druhou integrovat a následné integrály jsou jednodušší. Další jednoduchou metodou je substituce, která vyplývá z derivace složené funkce.

$$\int f(x)\mathrm{dx} = \int f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)\mathrm{dt} \tag{5.6}$$

$$(F(\varphi(t)))^{'} = F^{'}(x)\cdot\varphi^{'}(t) = f(x)\cdot\varphi^{'}(t) \tag{5.7}$$

Tato metoda je velmi účinná, pokud se nám podaří nalézt substituci, která integrál zjednoduší. To ale bývá obtížné, a proto jsou základní substituce v tabulkách. Pomocí substitucí se řada integrálů dá převést na racionální funkce, které se dají poměrně dobře integrovat. Princip spočívá v rozkladu racionální funkce na parciální zlomky. Zlomky mohou být čtyř typů.

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{c} t = x-a \\ \mathrm{dt} = \mathrm{dx} \end{array} \right| = \int \frac{A}{t}\mathrm{dt} = A\ln|t| = A\ln|x-a| + c \tag{5.8}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{c} t = x-a \\ \mathrm{dt} = \mathrm{dx} \end{array} \right| = \int \frac{A}{t^n}\mathrm{dt} = \frac{A}{1-n}\frac{1}{t^{n-1}} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c \tag{5.9}$$

$$\begin{gathered} \int \tfrac{Ax+B}{x^2+Cx+D}\mathrm{dx} = \tfrac{A}{2}\int \tfrac{2x+C}{x^2+Cx+D}\mathrm{dx} + \int \tfrac{B-\frac{1}{2}AC}{x^2+Cx+D}\mathrm{dx} = \ln|x^2+Cx+D| \\ + \int \tfrac{B-\frac{1}{2}AC}{\left(x+\frac{C}{2}\right)^2 + \left(D-\frac{C^2}{4}\right)}\mathrm{dx} \end{gathered} \tag{5.10}$$

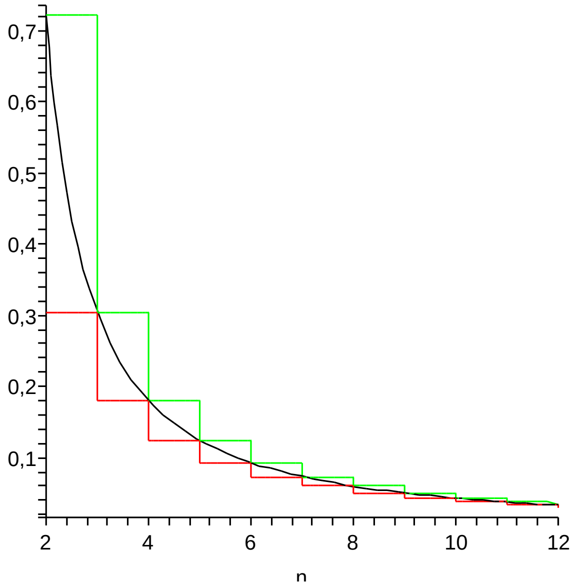
První integrál využívá toho, že v čitateli je derivace jmenovatele a je tak snadné zavést substituci. V druhém integrálu byla funkce ve jmenovateli doplněna na součet čtverců. To vede na integraci funkce $\frac{1}{t^2+1}$, což je arkustangens.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+Cx+D)^n}\mathrm{dx} = \frac{A}{2}\int \frac{2x+C}{(x^2+Cx+D)^n}\mathrm{dx} + \int \frac{B-\frac{1}{2}AC}{(x^2+Cx+D)^n}\mathrm{dx} \tag{5.11}$$

První integrál se řeší substitucí ve jmenovateli, jehož derivace je v čitateli. Ve druhém integrálu se aplikuje postup s doplněním na čtverec a arkustangentou. Tím se podaří snížit mocninu ve jmenovateli o 1. Pokračuje se až do konce.

5.4 Určitý integrál

Motivací pro jeho zavedení je výpočet obsahu pod nějakou funkcí. Prvotním nápadem je aproximovat funkci nějakými geometrickými obrazci, u kterých dokážeme vypočítat obsah. Na obr.(5.1) je znázorněna aproximace pomocí obdélníků. Šířka obdélníků je konstantní.



Obrázek 5.1: Horní a dolní aproximace plochy

Je zřejmé, že existuje dolní a horní aproximace. Červeně je vyznačen úbytek plochy způsobený dolní aproximací. Zeleně je vyznačen přebytek plochy způsobený horní aproximací. Je zřejmé, že čím bude šířka obdélníků kratší, tak budou chyby menší a aproximace se budou sobě blížit. To je základem numerických metod výpočtu plochy a zavádí se z toho určitý integrál.

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leq \overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \tag{5.12}$$

V definici jsou zavedeny dolní a horní integrální součty. Pokud bude šířka obdélníků nulová, tak součty splývají a dávají integrál. Toto je Riemannova definice integrálu a vyžaduje, aby funkce byla na intervalu spojitá. Pro praktický výpočet se využívá Newtonova definice integrálu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a) \tag{5.13}$$

Je to důsledek Lagrangeovy věty a ukazuje důvod zavedení pojmu integrál. Vlastnosti určitého integrálu jsou analogické vlastnostem neurčitého integrálu a používají se stejné metody pro výpočet.

5.5 Aplikace určitého integrálu

Základní aplikací, která vedla k zavedení integrálu je výpočet plochy pod funkcí. Další aplikací je výpočet objemu tělesa vzniklého rotací funkce kolem osy x. Odvození spočívá v aproximaci tělesa pomocí válců, jejichž objem umíme vypočítat. Je to opět důsledek Lagrangeovy věty.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{dx} \tag{5.14}$$

Další aplikací je výpočet délky křivky. Funkce se aproximuje po částech přímkou, jejichž délku umíme vypočítat. Zase se využije Lagrangeova věta.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{dx} \tag{5.15}$$

Další aplikací je výpočet střední hodnoty funkce.

$$f_s = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \tag{5.16}$$

Plocha pod funkcí je zřejmě rovna ploše jistého obdélníka. $b-a$ je délka intervalu, na kterém se střední hodnota počítá. Když se plocha obdélníku dělí jeho šířkou, tak dostaneme výšku obdélníku. Tato výška je definována tímto vzorcem.

5.6 literatura

[1] Jankovský Z., Průcha L., Integrální počet I, skriptum FEL ČVUT, 2000

Kapitola 6

Řady funkcí

6.1 Přesné zadání

- Řady funkcí
- Mocninná řada a poloměr konvergence
- Rozvoj funkce v mocninnou řadu o daném středu
- Fourierova řada a sinový kosinový, komplexní tvar
- Periodické rozšíření funkce pomocí Fourierovy řady

6.2 Řady funkcí

Funkční řada se nazývá výraz,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z) \tag{6.1}$$

který se skládá z posloupnosti funkcí a je vždy definována na nějaké množině obecně komplexních čísel. Protože z je proměnná, tak se trochu komplikuje konvergence. Pokud pro nějaké z řada konverguje, tak se to nazývá **bodová konvergence**. Pro různá z ale řada může konvergovat hůře než pro jiná. V bodech, ve kterých je konvergence stejně dobrá pro všechna z, se říká, že řada **konverguje stejnoměrně**. Podmínka pro stejnoměrnou konvergenci je následující.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| = |r_n(z)| < \varepsilon \tag{6.2}$$

Chyba odhadu funkce pomocí řady je tedy stejná pro celou množinu, pokud platí stejnoměrná konvergence. Pro její určování se dá použít **Weierstrassovo kritérium**.
Pokud se dá posloupnost funkcí shora odhadnout posloupností čísel $|f_k(z)| \leq a_k$ a číselná řada konverguje, pak funkční řada konverguje stejnoměrně. Pro stejnoměrně konvergentní řady platí některé významné vlastnosti.
Spojitost řady. Pokud jsou všechny funkce spojité, tak i funkce definovaná součtem řady je spojitá.
Integrace řady.

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(z) \mathrm{d}z \tag{6.3}$$

Derivace řady.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z) \tag{6.4}$$

6.3 Mocninná řada

Mocninná řada se nazývá výraz,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \tag{6.5}$$

kde z_0 je střed konvergence. Mocninná řada obecně konverguje absolutně uvnitř kruhu o nějakém poloměru. Vně kruhu řada diverguje. Situace na hranici se musí vyšetřit pro konkrétní případ. Poloměr kružnice se nazývá poloměr konvergence. Jeho výpočet vyplývá z podílového nebo odmocninového kritéria pro číselné řady.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = A \tag{6.6}$$

Nastávají pak tři situace.

- $0 < A < \infty \Rightarrow r = \frac{1}{A}$
- $A = 0 \Rightarrow r = \infty$
- $\mathrm{A} = \infty \Rightarrow r = 0$

6.4 Rozvoj funkce v mocninnou řadu

Mocninná řada se často zaměňuje za Taylorovu řadu, která je definována vztahem.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{6.7}$$

Tato definice se dá aplikovat na výpočet řad některých funkcí. Pro jednoduchost nechť $x_0 = 0$.

$$(e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{6.8}$$

$$\begin{gathered}(\sin x)' = \cos x, (\cos x)'' = -\sin x, (-\sin x)''' = -\cos x, (-\cos x)^{iv} = \sin x \\ \Rightarrow \sin x = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{gathered} \tag{6.9}$$

$$\begin{gathered}(\cos x)' = -\sin x, (-\sin x)'' = -\cos x, (-\cos x)''' = \sin x, (\sin x)^{iv} = \cos x \\ \Rightarrow \cos x = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\end{gathered} \tag{6.10}$$

Pro některé funkce však neexistuje vzorec pro obecnou derivaci. Typickým příklaem jsou racionální funkce, které se však dají převést na součet geometrické řady.

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{6.11}$$

Dají se také využít metody derivace a integrace řady.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{6.12}$$

Pokud bude vyžadován rozvoj v řadu o jiném středu, tak situace převádí na předešlé situace.

6.5 Fourierova řada

Fourierova řada slouží pro reprezentaci periodických funkcí pomocí řady. Periodické funkce se dají rozložit na součet sinových a kosinových funkcí, které tvoří ortogonální systém tj. jejich skalární součin je nulový.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \tag{6.13}$$

Čísla a_k, b_k se nazývají spektrální koeficienty a vyjadřují míru podobnosti funkce s danou harmonickou funkcí. Speciálně $\frac{a_0}{2}$ je střední hodnota funkce. Koeficienty se vypočítají podle vztahů.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{dt} \tag{6.14}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{dt} \tag{6.15}$$

Výpočet Fourierovy řady se zjednoduší, pokud je funkce symetrická. Pokud je sudá, tak ze vzorců vyplývá, že bude mít pouze kosinové složky. Pokud je lichá, tak bude mít pouze sinové složky. Fourierova řada se častěji vyjadřuje v komplexním tvaru. Harmonické funkce se pomocí Eulerových vztahů dají vyjádřit jako komplexní exponenciely.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\jmath k\omega t} \tag{6.16}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\jmath k\omega t}\mathrm{dt} \tag{6.17}$$

Zajímavou otázkou je konvergence řady k dané funkci. Problémy nastávají pouze v bodech nespojitosti čili skocích. Tam se objevují překmity. Nazývá se to Gibbsův jev.

6.6 Periodické rozšíření funkce

I neperiodické funkce se dají vyjádřit pomocí Fourierovy řady. Nejprve se však musí periodicky rozšířit čili udělat periodické opakování. Potom můžeme provést výpočet. Může být požadováno, aby Fourierova řada byla sinová nebo kosinová. Funkci je tedy nejdřív nutné předělat na lichou nebo sudou a poté periodicky rozšířit. Toto bude demostrováno na fuknci $f(t) = t$ na intervalu $< 0, 1 >$.

- liché rozšíření - t na intervalu $< -1, 0 >$
- sudé rozšíření - $-t$ na intervalu $< -1, 0 >$

6.7 Literatura

[1] Průcha L., Řady, skriptum FEL ČVUT, 1996

Kapitola 7

Diferenciální rovnice

7.1 Přesné zadání

- Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
- Metoda separace proměnných
- Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty
- Variace konstant a metoda odhadu
- Využití Laplaceovy transformace pro řešení soustavy difrenciálních rovnic

7.2 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je implicitní funkce, která splňuje.

$$F(x, y, y^{'}) = 0 \tag{7.1}$$

Je obyčejná, protože se derivuje pouze podle jedné proměnné. Opakem by byla parciální diferenciální rovnice. Je 1. řádu, protože se zde vyskytuje pouze 1. derivace. Řešení takové rovnice odpovídá řešení Cauchyovy úlohy.

$$y^{'} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \tag{7.2}$$

Zde se zavádí počáteční podmínka, protože při integraci je možné získat nekonečně řešení lišících se o konstantu. Jejich počet je roven řádu diferenciální rovnice. Cauchyova úloha je řešitelná, pokud f je spojitá na $I \times J, x_0 \in I, y_0 \in J$. Pokud je tam navíc $\frac{\partial f}{\partial y}$ omezená, tak na $I^{'} \subset I$ je řešení jednoznačné. Rozeznáváme dva základní typy rovnic 1. řádu, na kterých si ukážeme podmínky pro jednoznačné řešení.

- $f(x, y) = g(x)h(y)$ - stačí spojitost $g, h, h^{'}$
- $f(x, y) = p(x)y + q(x)$ - stačí spojitost p, q

7.3 Řešení rovnic 1. řádu

První typ rovnic se řeší pomocí metody separace proměnných. Rovnice se přepíše do tvaru $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ a potom se integruje.

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + c \tag{7.3}$$

Konstanta c se dopočítá podle počáteční podmínky.

$$(1+e^x)yy^{'}=e^x, y(0)=1 \Rightarrow \int y dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + c \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x)+c \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{2} = \ln 2 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \ln 2 \tag{7.5}$$

Druhý typ rovnice je rovnice, která je nehomogenní, protože má pravou stranu nezávislou na y. Pokud se pravá strana vynechá, tak se rovnice stane homogenní a dá se řešit seprací proměnných. Dostaneme tak obecné řešení. Řešení nehomogenní rovnice se nazývá partikulární. Když se obě řešení sečtou, tak dostaneme řešení celé diferenciální rovnice. Při separaci proměnných se konstanta c nedopočítává, ale považuje se za funkci. Tato metoda se nazývá variace konstanty. Řešení homogenní rovnice s funkcí c se dosadí do nehomogenní rovnice a tam se aplikuje počáteční podmínka.

$$x(x-1)y^{'}+y=x^2(2x-1), y(2)=6 \Rightarrow y(x)=\frac{c(x)x}{x-1}, y^{'}(x)=\frac{c^{'}(x)x}{t-1}-\frac{c(x)}{(t-1)^2} \tag{7.6}$$

$$x(x-1)\left(\frac{c^{'}(x)x}{t-1}-\frac{c(x)}{(t-1)^2}\right)+\frac{c(x)x}{t-1}=x^2(2x-1) \Rightarrow c(x)=t^2-t+d, 6=x^2+\frac{dx}{x-1} \Rightarrow d=1 \tag{7.7}$$

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Taková rovnice má obecný zápis

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{'} + a_0 y = f(x) \tag{7.8}$$

Pro řešení homogenní rovnice se sestavuje charakteristická rovnice.

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7.9}$$

Najdou se její kořeny a ty se projeví v řešení homogenní rovnice. Rozlišují se případy reálného a komplexního kořene.

- reálný kořen λ násobnosti k - $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
- komplexní kořen $\alpha + \jmath\beta$ násobnosti k - $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Všechna tato řešení tvoří **fundamentální systém**, který je zároveň bází vektorového prostoru řešení diferenciální rovnice. Obecné řešení je tedy určeno lineární kombinací prvků fundamentálního systému.

$$y^{''}+y^{'}=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0,1 \Rightarrow y(t)=A+Be^{-x} \tag{7.10}$$

7.5 Řešení nehomogenních rovnic n-tého řádu

Základní a univerzální metodou řešení je metoda **variace konstant**, která je obdobou variace kostanty. Celé to vede na následující soustavu rovnic.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \cdots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1^{'}(x) \\ c_2^{'}(x) \\ \vdots \\ c_n^{'}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Determinant matice je vždy nenulový, proto má soustava jednoznačné řešení. Determinant se nazývá **Wronskián**. Nejlépe se soustava řeší Cramerovým pravidlem. Jeho členy jsou prvky fundamentálního systému. Výsledkem jsou derivace funkcí konstant. Jejich integrace se dosadí do původní rovnice a aplikují se počáteční podmínky. Existuje jednodušší metoda zvaná **metoda odhadu**, ale dá se použít pouze na speciální tvar pravé strany rovnice. Ten musí mít tvar kvazipolynomu.

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x) \tag{7.12}$$

Pokud je $\alpha + \jmath\beta$ kořenem charakteristické rovnice násobnosti k, tak se partikulární řešení hledá ve tvaru.

$$x^k e^{\alpha x}(\widehat{P_t}(x)\cos\beta x + \widehat{Q_t}(x)\sin\beta x) \tag{7.13}$$

Polynomy ve vztahu mají neznámé koeficienty a jsou stupně $t = \max(m, n)$. Pokud má pravá strana tvar součtu kvazipolynomů, tak se řešení odhaduje odděleně a partikulární řešení je jejich součet podle principu superpozice. Řešení bude demostrováno na rovnici $y^{'} + y = 4xe^{-x}$, jejíž charakteristická rovnice má kořen $\lambda = -1$.

$$\widehat{y}(x) = x(a_1x + a_0)e^{-t}, \widehat{y^{'}}(x) = (-a_1t^2 + (2a_1 - a_0)t + a_0)e^{-t} \tag{7.14}$$

Tato soustava se vyřeší pro koeficienty polynomu a pak se aplikuje počáteční podmínka.

7.6 Využití Laplaceovy trasformace na soustavu rovnic

Laplaceova transformace je definována vztahem

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}\mathrm{dx} \tag{7.15}$$

Pro řešení soustav diferenciálních rovnic mají největší význam vzorce pro obraz derivace a integrálu.

$$L[f^{'}(x)] = pF(p) - f(0+) \tag{7.16}$$

$$L[f^(n)(x)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - \cdots - pf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \tag{7.17}$$

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} \tag{7.18}$$

Transformací se soustava diferenciálních rovnic převede na soustavu algebraických rovnic, která se už dá lépe řešit. po nalezení řešení je potřeba provést zpětnou transformaci. Ta se dobře provádí pro racionální funkce, které se rozkládají na parciální zlomky. Pak se využijí následující identity.

$$L\left[e^{ax}\right] = \frac{1}{p-a} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] = e^{ax} \tag{7.19}$$

$$L\left[x^n e^{ax}\right] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^n}\right] = \frac{x^{n-1}e^{ax}}{(n-1)!} \tag{7.20}$$

$$L[\cos\omega x] = \frac{p}{p^2+\omega^2}, L[\sin\omega x] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \tag{7.21}$$

Poslední dva vzorce se využívají, pokud parciální zlomky mají ve jmenovateli kvadratický trojčlen. Pomocí úprav se dá dostat k obrazu sinu a kosinu.

7.7 Literatura

[1] Pták P., Diferenciální rovnice Laplaceova transformace, skriptum FEL ČVUT, 1999
[2] Diferenciální rovnice, materiály doc. J. Tkadlece
[3] Laplaceova transformace, materiály doc. J. Tkadlece

Kapitola 8

Mechanika

8.1 Přesné zadání

- Rychlost, zrychlení, hybnost, síla, Newtonovy zákony
- Kinematika a dynamika hmotných bodů a tuhého tělesa
- Pohybová rovnice a její řešení
- Otáčivý pohyb, moment síly,hybnosti,setrvačnosti
- Práce a energie
- Mechanické zákony zachování

8.2 Kinematika a dynamika hmotného bodu

Kinematika se zabývá pohybem hmotného bodu, což je fyzikální fikce objektu, který má nekonečně malé rozměry a nenulovou hmotnost. Tato fikce se ale ukazuje dobrým modelem, pokud studujeme např. pohyb tenisového míčku po kopci. Křivka, po které se bod pohybuje se nazývá **trajektorie** nebo častěji **dráha**. Tato dráha je vektorová veličina, protože ukazuje směr pohybu hmotného bodu. Zavádí se pojem okamžitá **rychlost**.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_0 [m \cdot s^{-1}] \tag{8.1}$$

Tato veličina popisuje změnu elementární dráhy za elementární čas. Je to vektor, který je tečný k trajektorii. Vzhledem ke své vektorové povaze je možné ho rozložit na složky a zavádí se tak okamžité rychlosti v jednotlivých směrech souřadnic. Pokud známe rychlost, tak můžeme určit dráhu.

$$\Delta \mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \mathrm{dt} [m] \tag{8.2}$$

Dále se zavádí veličina **zrychlení**.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} [m \cdot s^{-2}] \tag{8.3}$$

Zrychlení je také vektor, ale většinou se do složek ve směru souřadných os nerozkládá. Více se používá rozklad na tečnou a normálovou složku.

$$\mathbf{a} = \frac{dv\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{v}_0 + v\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \tag{8.4}$$

První část je tečná k trajektorii, a proto ji nazýváme tečné zrychlení. Druhá část je normálové zrychlení. K libovolnému bodu trajektorie je možné určit oskulační kružnici která charakterizuje její křivost. Normálové zrychlení je na kružnici kolmé, tedy míří do středu. Doposud se hmotný bod pohyboval po nějaké trajektorii, ale on může také rotovat kolem osy. To nazýváme otáčivý pohyb. Popisuje se analogicky jako v předešlém případě pomocí úhlové rychlosti a úhlového zrychlení.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}[s^{-1}], \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}[s^{-2}] \tag{8.5}$$

Jsou to také vektory a směřují ve směru osy v kladném smyslu otáčení. Dynamika se zabývá příčinami pohybu hmotného bodu a uvažuje již jeho hmotnost. Aby se bod mohl pohybovat, tak na něj musí působit nějaká **síla**. Může se jednat o gravitaci, tření atd. Síla udělí bodu určitou rychlost v závislosti na jeho hmotnosti. To charakterizuje veličina **hybnost**.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}[Kg \cdot m \cdot s^{-1}] \tag{8.6}$$

Celá dynamika je založena třech základních **Newtonových** zákonech.

- zákon setrvačnosti - Těleso zůstává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud na něj nepůsobí žádná síla.
- zákon síly - $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}[N]$. Zrychlení bodu závisí na působící síle a hmotnosti bodu
- zákon akce a reakce - $\mathbf{F} = -\mathbf{F}^{'}$. Dva body na sebe působí opačnými stejně velikými silami, které současně vznikají a zanikají.

Tyto zákony platí pouze v **inerciální** soustavě, na kterou nepůsobí vnější síla. Při otáčivém pohybu se definují analogické pojmy **moment síly** a **moment hybnosti**, které uvažují vzdálenost bodu od osy otáčení a směr působící síly.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}[N \cdot m], \mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}[Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}] \tag{8.7}$$

8.3 Mechanika soustavy hmotných bodů a tuhého tělesa

Studium soustavy hmotných bodů je analogické situaci s jedním hmotným bodem. Takovou analogií je **První impulsová věta**

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \tag{8.8}$$

To znamená, že každý hmotný bod má svojí hmotnost a hybnost, ale celá soustava se chová jako jeden hmotný bod umístěný ve středu hmotnosti soustavy. Je nutné poznamenat, že síly působí pouze zvenčí. Síly vnitřní se anulují. Souřadnice středu hmotnosti se určí ze vzorce $\mathbf{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i$ Dále existuje **Druhá impulsová věta**, která popisuje rotaci.

$$\mathbf{M}_i = \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i \tag{8.9}$$

Opět se zde uvažují pouze momenty vnějších sil. Celá soustava se dá popsat pomocí jediného hmotného bodu, ale není to popis jednoznačný, protože záleží na volbě momentového bodu, ke kterému momenty hybnosti vztahujeme. Soustava hmotných bodů je spočetná množina bodů. Pokud tato množina bude nespočetná, tak mluvíme o **tuhém tělesu**. Tuhé těleso může vykonávat translační a rotační pohyb. Existují však zajímavé podmínky, za kterých je těleso v klidu. Tyto podmínky se nazývají rovnováha sil a rovnováha momentů.

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{F}_i = 0, \sum_{i=0}^{n} \mathbf{M}_i = 0 \tag{8.10}$$

U soustavy hmotných byl zaveden pojem střed hmotnosti. To samé platí pro tuhé těleso. Pouze suma přechází na integrál.

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{m} \int_V \varrho \mathbf{r} \mathrm{dV} \tag{8.11}$$

V definici se objevuje hustota a objem tělesa. U tranlačního pohybu byla definována hmotnost, která charakterizuje setrvačné vlastnosti tělesa, tedy obtížnost udělení určitého zrychlení. U rotačního pohybu existuje analogie, která se nazývá **moment setrvačnosti**. Ukážeme si definici pro hmotný bod i pro tuhé těleso.

$$J_i = m_i r_i^2, J = \int_V r^2 \varrho \mathrm{dV} \tag{8.12}$$

Záleží nejen na hmotnosti bodu, ale také na vzdálenosti od osy otáčení. Moment setrvačnosti tedy charakterizuje obtížnost roztočení tělesa s určitým zrychlením podle pohybové rovnice rotačního pohybu.

$$\mathbf{M} = J\varepsilon = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \tag{8.13}$$

Pomocí momentu setrvačnosti se novým způsobem definuje moment hybnosti $\mathbf{b} = J\omega$. Pohybová rovnice pro translační a rotační pohyb tvoří základ pro řešení úloh z mechaniky. Při znalosti působící síly nebo momentu síly dokážeme vypočíst budoucí stav mechanické soustavy. Protože jsou to diferenciální rovnice druhého řádu, tak se udávají dvě počáteční podmínky. Může to být počáteční poloha a rychlost nebo počáteční fáze a úhlová rychlost.

8.4 Práce a energie

Pokud působí síla hmotný bod, tak koná **práci**.

$$A = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ \mathbf{r} [J] \tag{8.14}$$

Protože se zde vyskytuje skalární součin, tak je jasné, že normálová složka síly práci nekoná. Dále se zavádí pojem **energie**.

$$-\Delta W = A \tag{8.15}$$

Při vykonání práce klesá energie soustavy. Energie se rozděluje na **kinetickou** a **potenciální**. Pokud se prací změní rychlost tělesa, tak mluvíme o energii kinetické. Podle charakteru pohybu ji můžeme rozdělit na enegii translačního a rotačního pohybu. Platí pro ně následující vztahy.

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2, W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{8.16}$$

Potenciální energie se projevuje při změně polohy tělesa vzhledem k jinému. Může mít mnoho podob. Nejčastěji o ni mluvíme v souvislosti s pojmem pole. V mechanice to je pole gravitační, které kolem sebe vytvářejí hmotná tělesa. Je to pojem relativní, protože závisí na referenčním bodě, ke kterému potenciální enegii vztahujeme. Celková energie soustavy je dána součtem energie kinetické a potenciální.

8.5 Zákony zachování v mechanice

Zachování energie
Součet kinetické a potenciální energie je konstantní. Pokud potenciální enegie klesá, tak roste kinetická. Příkladem může být padající míč, který postupně nabírá rychlost. Toto je zcela obecný princip, podle kterého energie pouze mění svou formu, ale není ji možné vytvořit.
Zachování hybnosti
V izolované soustavě, na kterou nepůsbí vnější síla platí.

$$\mathbf{F} = 0 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Longrightarrow \mathbf{p} = konst \tag{8.17}$$

Hybnost soustavy se nemění. Tímto lze např. vysvětlit nepružné srážky, kdy jedna koule se zastaví nárazem do jiné koule, která má potom stejnou hybnost jako první koule.
Zachování momentu hybnosti
V izolované soustavě, na kterou nepůsobí momenty vnějších sil platí.

$$\mathbf{M} = 0 = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \Longrightarrow \mathbf{b} = konst \tag{8.18}$$

Moment hybnosti soustavy se tedy nemění. Tím lze např. vysvětlit, proč se na rotujícím disku kulička blíže středu pohybuje rychleji než kulička na obvodu. Tyto tři zákony jsou základní principy našeho světa. Jsou důsledkem základních vlastností časoprostoru, homogenity a izotropie.

8.6 Literatura

[1] Kubeš P., Kyncl Z., Fyzika I, skriptum FEL ČVUT, 2003

Kapitola 9

Fyzikální pole

9.1 Přesné zadání

- Pojem fyzikálního silového pole, popis pole pomocí intenzity a potenciálu, vztah mezi těmito veličinami
- Gravitační pole a příklady jeho působení
- Elektrické pole ve statickém případě
- Stacionární elektrické pole, elektrický proud a jeho hustota, Jouleův zákon
- Vedení elektřiny ve vodičích, kapalinách a plynech

9.2 Fyzikální pole

Fyzikální pole je matematický model silového působení mezi objekty. Zdrojem tohoto pole jsou samy objekty. Pokud se do nějakého bodu v prostoru umístí další objekt, tak ten zdrojový na něj bude působit silou. Pro další úvahy je důležité předpokládat, že druhý objekt je natolik slabý, aby se jeho silové působení dalo zanedbat. Je zřejmé, že sílu můžeme definovat v libovolném bodě. Touto prostorovou závislostí síly je definováno pole. Síla je vektor, a proto se takové pole nazývá vektorové. Existuje ale i pole skalární, které je v prosoru určeno číslem. Příkladem vektorového pole je pole gravitační a příkladem skalárního pole je pole teplotní. Dále se budeme pouze vektorovým polem, které v každém bodě definuje vektor. **Síla** je v poli definována bez ohledu na přítomnost druhého objektu. Protože síla závisí na velikosti druhého objektu, tak se zavádí veličina zvaná **intenzita**. Ta určuje silového působení na jednotkový objekt bez ohledu na jeho přítomnost v poli. Intenzita se používá pro posouzení silového působení zdrojového objektu. Protože je to vektor, tak se v poli znázorňuje šipkami zvanými siločáry jako grafické znázornění pole. Takový obrázek je samozřejmě pouze informační, protože šipky jsou nakresleny pouze v některých bodech prostoru. Pokud se na objekt působí silou, tak se mu uděluje energie v závislosti na jeho velikosti. V poli je to energie potenciální. Je to relativní pojem, protože závisí na vztažném bodu. Stejně jako v případě intenzity se zavádí energie jednotkového objektu zvaná potenciál. Množiny bodů, které mají stejný potenciál v poli se nazývají ekvipotenciální plochy. Nyní si ukážeme vzájemný vztah těchto veličin. Z mechaniky je známo, že objekt získá energii po vykonání práce vnější silou.

$$W_p = \int_r^\infty \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{ds} = - \int_\infty^r \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} (9.1)$$

Při vykonání práce se snižuje potenciální energie, protože se objekt vzdaluje od vlivu zdroje. Podle vztahu je potenciální energie ekvivalent práci vnější síly pro přemístění objektu do místa, kde je vliv zdroje nulový tedy do nekonečné vzdálenosti. Současně je to práce, kterou musí zdroj vykonat, aby se objekt přemístil do oblasti jeho vlivu z referenční vzdálenosti. Je zřejmé, že energie v poli je záporná, protože je potřeba vykonat práci pro získání nulové energie. Stejná rovnice platí pro intenzitu a potenciál.

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{I} \cdot \mathbf{ds} \tag{9.2}$$

Pro grafické znázornění je důležitá vzájemná poloha intenzity a potenciálu. Siločáry intenzity jsou kolmé na ekvipotenciály. To ihned plyne z následující rovnice.

$$\mathbf{I} = -\mathrm{grad}\varphi \tag{9.3}$$

Intenzita míří k minimu potenciálu. Gradient je vždy kolmý na plochu. Dalším důležitým pojmem je **konzervativní** pole. Pouze v něm má smysl zavádět potenciál. Při přemístění objektu po uzavřené křivce se nekoná práce neboli

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0 \tag{9.4}$$

9.3 Gravitační pole

V gravitačním poli jde o působení objektu s hmotností. Předpokládejme, že zdroj je hmotný bod. Jednotkový objekt má hmotnost 1 Kg. Potom platí následující rovnice pro veličiny pole.

$$\text{Newtonův zákon}\mathbf{F} = \kappa \frac{mM}{r^2}\mathbf{r}_0, \mathbf{E} = \kappa \frac{M}{r^2}\mathbf{r}_0 \tag{9.5}$$

$$W_p = -\kappa \frac{mM}{r}, \varphi = -\kappa \frac{M}{r} \tag{9.6}$$

Podle Newtonova zákona je zřejmé, že silové působení ubývá s kvadrátem vzdálenosti a je tedy možné ho v určité vzdálenosti již zanedbat. Gravitační pole je konzervativní. Gravitační pole lze ukázat na různých příkladech. Lidé se pohybují po Zemi kvůli gravitační přitažlivosti. Dalším příkladem jsou pohyby planet ve sluneční soustavě. Ty vysvětlují Keplerovy zákony, které jsou důsledkem Newtonova zákona.

- 1. Keplerův zákon - Planety obíhají po eliptických drahách v jejichž ohnisku je Slunce.
- 2. Keplerův zákon - Plošná rychlost je konstantní.
- 3. Keplerův zákon - Kvadrát oběžné doby je úměrný třetí mocnině velké poloosy v elipse $T^2 = \kappa r^3$.

9.4 Elektrostatické pole

V elektrickém poli jde o působení objektu s nábojem. Na rozdíl od pole gravitačního existují zdroje s nábojem kladným i záporným tj. proton a elektron. Je to pole konzervativní. Předpokládejme, že zdrojem je bodový náboj. Jednotkový objekt má náboj 1 C (coulomb). Potom platí následující rovnice pro veličiny pole.

$$\text{Coulombův zákon}\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qQ|}{r^2}\mathbf{r}_0, \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}\mathbf{r}_0 \tag{9.7}$$

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qQ|}{r}, \varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r} \tag{9.8}$$

Podle Coulombova zákona je zřejmé, že silové působení ubývá s kvadrátem vzdálenosti. Vzhledem k různým znaménkům náboje existuje síla přitažlivá nebo odpudivá. Náboje stejné polarity se odpuzují a naopak. V rovnicí se objevuje nová veličina ε_0 zvaná permitivita vakua, které je specifické naprostou absencí nábojů. V jakémkoliv jiném prostředí mohou existovat náboje při působení elektrického pole. Taková prostředí se nazývají **dielektrika**. Vysvětlíme si to na příkladu dvou kovových desek, mezi kterými je olej. V klidovém stavu se atomy oleje jeví jako neutrální objekty bez náboje. Jakmile se mezi deskami, které nazýváme **elektrody** objeví elektrické pole, tak elektrony budou přitahovány k elektrodě proti směru elektrické intenzity a protony k elektrodě po směru intenzity. Tento jev se nazývá **elektrická polarizace**, kdy se nabité částice orientují podle vnějšího pole, které vzniklo přiložením napětí na elektrody. Soustavu elektrod můžeme považovat za **kondenzátor**. Přeskupením částic vzniklo nové pole vázaných nábojů, které je orientováno opačně než vnější pole. Následkem toho je pole v dielektriku slabší než pole ve volném prostoru. Toto oslabení určuje relativní permitivita materiálu $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Kvůli polarizaci se zavádí veličina **elektrická indukce**, která popisuje celé elektrické pole.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{9.9}$$

V definici intenzity se objevují volné náboje a kvůli polarizaci vznikají náboje vázané. Dohromady tvoří celkový náboj, který se vztahuje k indukci. Při znalosti nábojů dokážeme příslušnou veličinu určit podle **Gaussovy věty**.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = Q_c, \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}, \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{dS} = Q_v \tag{9.10}$$

V příkladu dielektrika byla řeč o kondenzátoru. Ten je používán pro schopnost akumulace elektrické energie. Při znalosti přiloženého napětí dokážeme určit náboj, který se na objeví pomocí kapacity $Q = CU$.

9.5 Stacionární elektrické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou nepohyblivé náboje. Při působení elektrického pole se ale začnou pohybovat. Pokud je tento pohyb rovnoměrný, tak mluvíme o stacionárním elektrickém nebo proudovém poli. Pohybující se náboje vytvářejí **elektrický proud** definovaný jako časovou změnu náboje $I = \frac{dQ}{dt}$. Ten je ekvivalentem náboje a platí rovnice tvarem analogická Gaussově větě.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS} \tag{9.11}$$

Zde se objevuje **proudová hustota**, která vyjadřuje plošnou hustotu proudu a také určuje směr toku nábojů. Důležitým principem v elektrickém poli je zákon zachování náboje, podle kterého se náboj nemůže vytvořit ani ztratit. Matematicky to formuluje rovnice kontinuity.

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS} = -\frac{dQ}{dt} \tag{9.12}$$

V teorii elektrických obvodů mají velký význam Ohmův a Jouleův zákon v diferenciálním a především integrálním tvaru.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, U = RI \tag{9.13}$$

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, P = UI \tag{9.14}$$

Ohmův zákon říká, že elektrony se ve vodiči nepohybují beze ztrát, ale je nutné vykonat práci v závislosti na konduktivitě resp. odporu materiálu. Jouleův zákon říká, že kvůli těmto ztrátám se materiál ohřívá a vzniká určitý výkon. Dalšími důležitými poznatky pro teorii obvodů jsou **Kirchhoffovy zákony**.

- Součet proudů v uzlu je nulový. To je důsledek rovnice kontinuity, protože náboj se nemůže ztrácet.
- Součet napětí na obvodových prvcích podél uzavřené smyčky je roven napětí vnějšího zdroje. Aby obvod fungoval, tak se musí vybavit napájecím zdrojem. Práce vykonaná po uzavřené smyčce není nulová, a proto proudové pole není konzervativní.

9.6 Vedení elektřiny ve vodičích, kapalinách a plynech

Kovy mají krystalickou strukturu. Elektrony při pohybu narážejí na atomy mřížky a brzdí se. Toto vede k zavedení elektrického odporu. Ve skutečnosti se nejedná o srážky ve smyslu mechaniky ale o vychýlení z dráhy kvůli působení elektrických polí. Srážky se řídí statistikou, podle které je směr vychýlení náhodná záležitost. Vnější elektrické pole má ale stále stejný směr, a tak se pohyb elektronů neustále usměrňuje. Takový pohyb se nazývá drift a pohyb atomů mřížky se nazývá tepelný.
Kapaliny jsou velmi špatné vodiče. Pokud se přidá nějaká příměs, tak již mohou dobře vést elektrický proud. Vysvětlíme si to na vodě s příměsí chloridu sodného. Při promíchání dochází k disociaci chloridu čili k rozpadu na ionty. Ionty mají náboj a vzniká tak elektrické pole a snaží se znovu vytvořit molekulu chloridu, protože iontová vazba je velmi silná. Vytváří se substance s vyrovnaným procesem disociace a rekombinace zvaná **elektrolyt**, který vede proud. Po přiložení elektrod se kationty pohybují ke katodě a anionty k anodě. Pro kapaliny platí dva Faradayovy zákony elektrolýzy.

- Množství látky vyloučené na elektrodě je úměrné prošlému naboji $m = AQ$.
- Elektrochemický ekvivalent závisí na materiálu elektrolytu $A = \frac{M}{vF}$

Plyny nejsou vodivé, protože všechny atomy jsou neutrální. Aby přestaly být neutrální, tak je nutné překonat vnější prací přitažlivé síly mezi elektrony a protony. Tomuto procesu se říká ionizace a v plynu dochází k výboji. Je zřejmé, že nabité částice vytvářejí elektrické pole, ale snaží se rekombinovat. Pokud se koná vnější práce, tak se výboj nazývá nesamostatný. Při překročení zápalného napětí se částice urychlí natolik, že ionizují ostatní atomy. Existuje čtvrté skupenství, které je neustále ionizované. Nazývá se plasma.

9.7 Literatura

[1] Kubeš P., Kyncl Z., Fyzika I, skriptum FEL ČVUT, 2003

Kapitola 10

Elektromagnetické pole

10.1 Přesné zadání

- Maxwellovy rovnice v diferenciálním a integrálním tvaru
- Vysvětlení na jednoduchých příkladech - nabitá koule, vodič s proudem
- Síla, energie a hustota energie
- Pohyb částic v silových polích
- Elektrické a magnetické vlastnosti látek

10.2 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice jsou naprostým základem elektromagnetického pole. Jakýkoliv problém vychází z jejich řešení. V nízkofrekvenčním poli se uvádějí v integrálním tvaru, protože popisují celkový charakter pole.

- Gaussova věta elektrostatiky $\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = Q$ - Zdrojem elektrického pole jsou náboje, a proto je pole zřídlové.
- Gaussova věta magnetismu $\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0$ - Magnetické náboje neexistují. Magnetické pole je vírové s uzavřenými siločarami.
- Ampérův zákon celkového proudu $\oint_l \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I + \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ - Zdrojem časově proměnného vírového magnetického pole jsou elektrické proudy a časově proměnné elektrické pole tvořené vázanými náboji.
- Faradayův indukční zákon $\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ - Zdrojem časově proměnného vírového elektrického pole je časově proměnné magnetické pole. Orientace polí je opačná.

Tato soustava rovnic sama o sobě nestačí. Připojují se ještě materiálové vztahy, rovnice kontinuity a Lorentzova síla. Při řešení problémů elektromagnetických vln se Maxwellovy rovnice modifikují do diferenciálního tvaru, protože popisují lokální charakter pole. Tento převod je založen na aplikaci Gaussovy a Stokesovy věty.

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \varrho \tag{10.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{10.2}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{10.3}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{10.4}$$

10.3 Jednoduché příklady

Výpočet elektrické intenzity nabité koule je jednoduchý problém na aplikaci Gaussovy věty elektrostatiky. Ze symetrie je zřejmé, že vektor intenzity je kolmý na kulovou plochu, na které je konstantní, protože ekvipotenciály jsou koncentrické koule. Původní integrál se velmi zjednoduší na výpočet povrchu koule.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = E \oint_S \mathbf{dS} = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{10.5}$$

Tím je vyřešena intenzita kolem koule. Zbývá řešení uvnitř koule. Je známo, že náboje se vyskytují na povrchu tělesa. Uvnitř tedy žádné náboje nejsou, a proto je tam intenzita nulová. Maximum intenzity je tedy na povrchu koule. Výpočet magnetické intenzity válcového vodiče protékaného proudem je jednoduchý problém na aplikaci Ampérova zákona. Ze symetrie je zřejmé, že intenzita bude konstantní na válcových plochách, ke kterým je tečná. Integrál se tak zjednoduší na výpočet délky kružnice.

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = H \oint_l \mathbf{dl} = H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \tag{10.6}$$

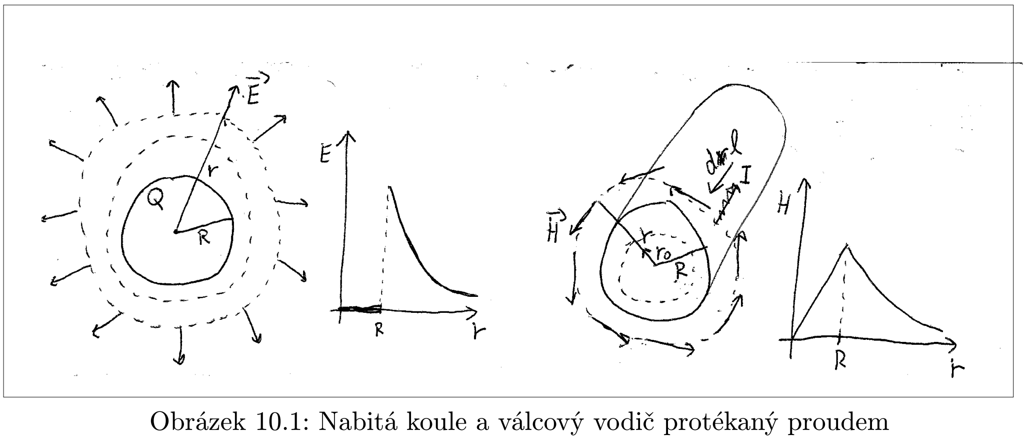
Toto je řešení pro vnější prostor. Zbývá řešení uvnitř vodiče. Elektrické proudy tečou v celém objemu vodiče. Pokud se hledá intenzita na nějaké vnitřní kružnici, tak se uvažuje pouze část proudu.

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow H = \frac{Ir}{2\pi R^2} \tag{10.7}$$

To je lineární průběh, který dosahuje maxima na povrchu vodiče. Určení směru magnetické intenzity vychází z Biot-Savartova zákona.

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \tag{10.8}$$

Toto je matematický zápis pravidla pravé ruky. Vektor intenzity má směr vektorového součinu vektoru elementárního úseku a vodiče a jednotkového vektoru spojnice s bodem, kde pole počítáme. Ilustrace obou příkladů je na obr.(10.1).



Obrázek 10.1: Nabitá koule a válcový vodič protékaný proudem

10.4 Síla a energie

Síla v elektromagnetickm poli je definována Lorentzovou silou.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{10.9}$$

Je to síla působící na náboj a má obecně složku elektrickou i magnetickou. Elektrická intenzita náboj urychluje ve směru vektoru. Magnetická síla je kolmá na směr rychlosti náboje. Nemůže konat práci, a proto ho neurychluje. Pouze zakřivuje trajektorii pohybu, protože magnetická indukce kvůli uzavřenosti siločar neustále mění směr. Ve speciálních případech může být některá složka síly nulová. Důležité příklady silového působení jsou úlohy s elektrickým a magnetickým dipólem. Elektrický dipól tvoří dva opačné náboje blízko sebe. Kůli různým nábojům je mezi nimi elektrické pole. Vnější pole je jinak orientované a působí na dipól momentem síly.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times Q\mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{10.10}$$

Zde se zavádí elektrický dipólový moment. Vnější pole se snaží natočit dipól do směru elektrické intenzity, protože tam je kvůli rovnoběžnosti vektorů moment síly nulový. Magnetický dipól je malá smyčka, kterou protéká proud. Vnější magnetické pole je jinak orientované a působí na dipól momentem síly.

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{10.11}$$

Zde se zavádí magnetický moment. Vnější pole se snaží natočit smyčku tak, aby vektory byly rovnoběžné tedy kolmo na siločáry. Důsledkem silového působení na dipóly je elektrická a magnetická polarizace materiálu. Elektromagnetické pole přenáší energii. Její výpočet je obecně velmi složitý v závislosti na konkrétní situaci. Proto se zavádí pomocný pojem hustota energie, který popisuje energii lokálně v elementárním objemu.

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \tag{10.12}$$

První část je hustota elektrického pole a druhá část je hustota magnetického pole. Celková energie se určí objemovou integrací hustoty. Jednoduchými příklady, kdy energii lze lehce určit jsou základní obvodové prvky kondenzátor a cívka, které se používají jako akumulátory elektrické a magnetické energie.

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2, W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{10.13}$$

Mírou akumulované energie jsou parametry kapacita kondenzátoru a indukčnost cívky.

10.5 Pohyb částice v elektromagnetickém poli

Při řešení se vychází z Lorentzovy síly. Rozlišujeme tři jednoduché případy.

- Stacionární elektrické pole - Na částici působí pouze konstantní elektrická síla. Výsledkem je rovnoměrně zrychlený pohyb po přímce ve směru intenzity. Urychlování není nekonečné, protože při vysokých rychlostech se musí uvažovat relativistické jevy.
- Stacionární magnetické pole - Na částici působí pouze magnetická síla. Protože je na směr pohybu kolmá, tak nemění rychlost. Kvůli zakřivení dráhy se částice pohybuje po kružnici.
- Stacionární elektromagnetické pole - Na částici působí elektrická i magnetická síla. Částice se tedy pohybuje současně po přímce i kružnici. Superpozicí vzniká šroubovice se stoupáním ve směru elektrického pole.

10.6 Elektrické a magnetické vlastnosti látek

Vlastnosti materiálu se posuzují podle permitivity, konduktivity a permeability. Permitivita se týká dielektrik. Takové materiály podléhají elektrické polarizaci. Ta spočívá v natáčení elektrických dipólů do směru vnějšího elektrického pole. Tím se zesiluje elektrické pole. Dielektrika se dělí na paraelektrika a feroelektrika. U paraelektrik se po vypnutí pole látka depolarizuje zatímco u feroelektrik tento stav přetrvává. Toho se využívá u elektretových mikrofonů. Dielektrika se používají jako izolanty nebo výplň kondenzátorů.
Podle konduktivity se materiály dělí na nevodiče, polovodiče a vodiče. Nevodiče nevedou elektrický proud. Jsou to většinou izolanty. Vodiče mají vysokou konduktivitu $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^6$ a používají se pro vedení elektrického proudu. Příkladem je měď a hliník. Polovodiče se mohou chovat jako vodiče i nevodiče. Konduktivita u nich závisí na teplotě, směru průtoku proudu atd. PN přechod u diody může být polarizován propustně i nepropustně.
Podle permeability se materiály dělí na diamagnetika, paramagnetika a feromagnetika. U diamagnetik je relativní permeabilita menší než jedna. Magnetické dipĺové momenty se vykompenzují a ani vnější pole to nezmění. Ve výsledku se tak magnetické pole zeslabuje. Příkladem jsou vzácné plyny. U paramagnetik se momenty nevykompenzují, a proto trochu zesilují pole. Příkladem je mangan a platina s relativní permeabilitou větší než jedna. Feromagnetika mají vysokou relativní permeabilitu až 10000. Magnetické pole se velmi zesiluje a tento stav se zachová i po vypnutí vnějšího pole. Příkladem je železo, kobalt a nikl. Feromagnetika se využívají při výrobě magnetů.

10.7 Literatura

[1] Kubeš P., Kyncl Z., Fyzika I, skriptum FEL ČVUT, 2003

Kapitola 11

Analýza elektrických obvodů

11.1 Přesné zadání

- Obvodové prvky - rezistor, kapacitor, induktor a vázané induktory
- Obvodové rovnice - Kirchhoffovy zákony, smyčkové proudy a uzlová napětí

11.2 Obvodové prvky

V elektrických obvodech se rozlišují tři základní obvodové prvky: rezistor, kapacitor a induktor. Nejprve začneme **rezistorem**. Ten modeluje nevratnou přeměnu energie na teplo. Z modelu vedení elektrického proudu je známo, že každá látka má nějaký odpor a průchodu proudu se brání. Vlastnost odporu je popisována rezistorem pomocí Ohmova zákona.

$$u = Ri \tag{11.1}$$

Této závislosti se říká voltampérová charakteristika. V obvodové analýze se předpokládá, že je tato závislost lineární, což je samozřejmě velmi zjednodušené. Míru tepelných ztrát určuje Jouleův zákon pomocí výkonu.

$$P = ui \tag{11.2}$$

Další základní součástkou je **kapacitor**. Ten se používá jako akumulátor energie elektrického pole. Po připojení napětí se na jeho elektrodách objeví náboj a mezi nimi elektrické pole. Tato závislost je popsána voltcoulombovou charakteristikou, kde konstantou úměrnosti je kapacita.

$$Q = Cu \tag{11.3}$$

Předpoklad linearity je opět velkým zjednodušením. V obvodové analýze se ale s nábojem nepracuje. Napětí a proud se určí podle následujících rovnic.

$$i = C\frac{du}{dt} \tag{11.4}$$

$$u = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{dt} + u_c(0) \tag{11.5}$$

Z první rovnice plyne, že kapacitor se ve stejnosměrných obvodech chová jako rozpojený kontakt s nulovým proudem. Ve druhé rovnici je vidět schopnost akumulace elektrické energie, protože kapacitor na sobě může mít zbytkové napětí i bez vnějšího zdroje. Akumulovaná energie se určí z rovnice.

$$W = \frac{1}{2}Cu^2 \tag{11.6}$$

Poslední základní součástkou je **induktor**. Ten se používá jako akumulátor energie magnetického pole. Při průchodu proudu induktor kolem sebe vytváří magnetický tok. Tato závislost je popsána ampérweberovou charakteristikou, kde konstatou úměrnosti je indukčnost.

$$\Phi = Li \tag{11.7}$$

Předpoklad linearity je opět velkým zjednodušením. V obvodové analýze se ale s magnetickým tokem nepracuje. Napětí a proud se určí podle následujících rovnic.

$$u = L\frac{di}{dt} \tag{11.8}$$

$$i = \frac{1}{L}\int u(t)\mathrm{dt} + i_L(0) \tag{11.9}$$

Z první rovnice plyne, že induktor se ve stejnosměrných obvodech chová jako zkrat s nulovým napětím. Ve druhé rovnici je vidět schopnost akumulace magnetické energie, protože induktorem může procházet zbytkový proud i bez vnějšího zdroje. Akumulovaná energie se určí z rovnice.

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \tag{11.10}$$

Protože je magnetické pole zřídlové, tak magnetické siločáry od jednoho induktoru procházejí i druhým induktorem. Zavádí se pojem **vázané induktory**. Přes magnetický tok se v druhém induktoru vybudí proud v závislosti na vzájemné indukčnosti.

$$M = \kappa\sqrt{L_1L_2} \tag{11.11}$$

V rovnici se objevuje činitel vazby, který nabývá hodnot v intervalu $< 0, 1 >$. Při jedničce celý magnetický tok prochází i druhým induktorem. Při nule neprochází žádný tok. Uvedeme si pouze vzorce pro napětí na jednotlivých induktorech. Vzorce pro proudy také existují, ale vzhledem ke složitosti se moc nepoužívají.

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}, u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt} \tag{11.12}$$

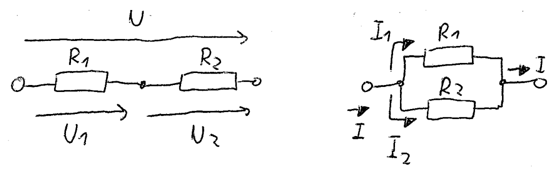
Napětí se může projevit kladně nebo záporně. Záleží na orientaci vinutí induktorů. Při souhlasné orientaci se napětí přičítá a při opačné se odečítá. Následuje rovnice pro energii.

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm MI_1I_2 \tag{11.13}$$

U kapacitorů neexistuje jejich vázaná forma, protože elektrické pole je zřídlové.

11.3 Obvodová analýza

Složité obvody je někdy možné zjednodušit a usnadnit tak jejich řešení. Ukážeme si některé základní principy v obvodech s rezistory, protože pro jiné součástky je to analogické. Často se objevuje **dělič napětí** a **dělič proudu** viz obr.(11.1).



Obrázek 11.1: Dělič napětí a proudu

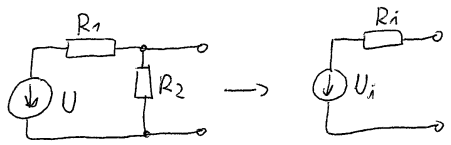
Dělič napětí jsou dva sériově zapojené rezistory, kterými prochází stejný proud. Cílem je nalezení vzorce pro napětí na prvním rezistoru.

$$\frac{U_1}{U} = \frac{U_1}{U_1 + U_2} = \frac{IR_1}{IR_1 + IR_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{11.14}$$

Dělič proudu jsou dva rezistory zapojené paralelně, na kterých je stejné mapětí. Cílem je nalezení vzorce pro proud prvním rezistorem.

$$\frac{I_1}{I} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{11.15}$$

Dále se využívá **Théveninův** a **Nortonův** teorém. Podle Thévenina se dá lineární aktivní dvojpól vzhledem k nějakým svorkám nahradit zdrojem napětí naprázdno a sériovým odporem po vyjmutí nezávislých zdrojů. Podle Nortona se dá lineární aktivní dvojpól nahradit vzhledem ke svorkám zdrojem proudu nakrátko a paralelní vodivostí po vyjmutí nezávislých zdrojů. Ukážeme si nejčastější příklad použíti Thévenina viz obr.(11.2).



Obrázek 11.2: Použití Théveninova teorému

Napětí naprázdno je rovno napětí na paralelním rezistoru a náhradní odpor je roven paralelní kombinaci obou rezistorů.

$$U_i = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}, R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{11.16}$$

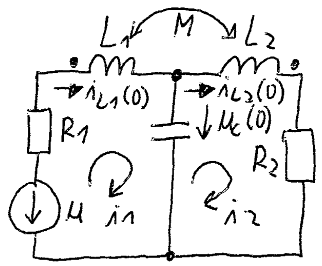
Dále se často využívají **Kirchhoffovy zákony**.

- Součet proudů v uzlu je roven nule
- Součet napětí na součástkách podél utavřené smyčky je roven napětí vnějšího zdroje.

Jejich význam se ukáže při sestavování obvodových rovnic. Posledním využívanou metodou je **princip superpozice**. Pokud je v obvodu více zdrojů, tak se analýza může provádět vždy při jednom zdroji a výsledky sečíst. Zdroje napětí se nahrazují zkratem a zdroje proudu rozpojenými svorkami.

11.4 Obvodové rovnice

Při řešení složitých obvodů se sestavují obvodové rovnice, které jsou univerzální a nevyžadují veliké znalosti z teorie obvodů. Takto se provádí počítačová analýza. Začneme s **metodou smyčkových proudů**, která vychází z 2. Kirchhoffova zákona. Podél uzavřené smyčky se počítají napětí na součástkách vyjádřená přes proudy. Ze zapojení se dá určit počet nutných rovnic. Zjistí se počet smyček a odečtou se zdroje proudu. Princip řešení je ukázán na obr.(11.3).



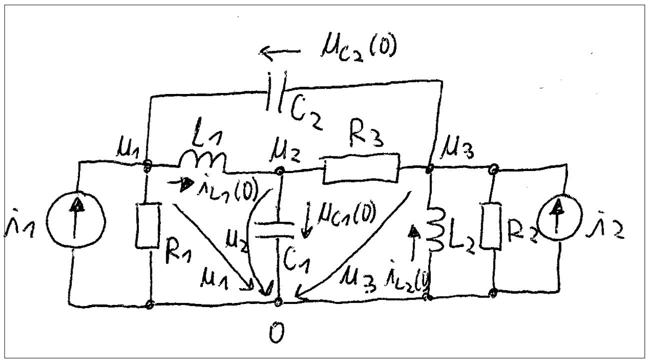
Obrázek 11.3: Použití metody smyčkových proudů

Máme dvě smyčky a žádné proudové zdroje. výsledkem bude soustava dvou integrodiferenciálních rovnic.

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + u_c(0) + \frac{1}{C}\int (i_1 - i_2)\mathrm{dt} = -u \tag{11.17}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 - u_c(0) + \frac{1}{C}\int (i_2 - i_1)\mathrm{dt} = 0 \tag{11.18}$$

Dále se používá **metoda uzlových napětí**, která vychází z 1. Kirchhoffova zákona. Počítají se proudy tekoucí a vytékající z uzlu vyjádřené pomocí napětí. Pro stanovení počtu rovnic se zjistí počet uzlových dvojic a od nich se odečte počet napěťových zdrojů. Jeden uzel se volí jako referenční s nulovým napětím. Princip řešení je ukázán na obr.(11.4).



Obrázek 11.4: použití metody uzlových napětí

Máme tři uzlové dvojice a žádné zdroje napětí. Vede to na soustavu tří integrodiferenciálních rovnic.

$$-i_1 + \frac{u_1}{R_1} + i_{L_1}(0) + \frac{1}{L_1}\int (u_1 - u_2)\mathrm{dt} - C_2\frac{d(u_3 - u_1)}{dt} = 0 \tag{11.19}$$

$$-i_{L_1}(0) - \frac{1}{L_1}\int (u_1 - u_2)\mathrm{dt} + C_1\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} = 0 \tag{11.20}$$

$$-i_2 + \frac{u_3}{R_2} - i_{L_2}(0) + \frac{1}{L_2}\int u_3\mathrm{dt} + \frac{u_3 - u_2}{R_3} + C_2\frac{u_3 - u_1}{dt} = 0 \tag{11.21}$$

11.5 Literatura

[1] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 1, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002

Kapitola 12

Harmonický ustálený stav

12.1 Přesné zadání

- Harmonický ustálený stav
- Fázory napětí a proudu
- Komplexní imitance

12.2 Fázory

Harmonický ustálený stav se zabývá obvodovou analýzou, kdy napětí a proudy jsou harmonické funkce. V elektrotechnické praxi je to nejdůležitější případ.

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{12.1}$$

Harmonický signál je určen svojí amplitudou, úhlovou frekvencí a fází. Práce s trigonometrickými funkcemi je obtížná, a tak se používá komplexní transformace, která harmonické funkce nahrazuje fázory bez časové závislosti.

$$\mathbf{U} = U_m e^{\jmath\varphi} \tag{12.2}$$

Fázor je komplexní číslo, a tak se skládá z modulu a fáze, pokud ho definujeme v polárních souřadnicích. Komplexní číslo se dá také definovat v kartézských souřadnicích, ve kterých je transformace dobře vidět. Zde se zavádí pojem rotující fázor, který je časově závislý. Je to vlastně fázor, který opisuje kružnici v komplexní rovině.

$$\mathbf{U}_{rot} = \mathbf{U}e^{\jmath\omega t} = U_m e^{\jmath(\omega t+\varphi)} = U_m \cos(\omega t + \varphi) + \jmath U_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow u(t) = \Im[\mathbf{U}e^{\jmath\omega t}] \tag{12.3}$$

Pokud se v obvodu vyskytují kapacitory a induktory, tak se ve vzorcích pro napětí a proudy používají derivace a integrály. V harmonickém stavu se dají snadno transformovat do komplexní roviny.

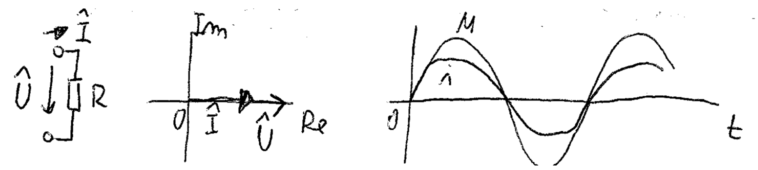
$$\frac{d}{dt}U_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{d}{dt}\Im[\mathbf{U}e^{\jmath\omega t}] = \Im[\jmath\omega\mathbf{U}e^{\jmath\omega t}] \tag{12.4}$$

$$\int U_m \sin(\omega t + \varphi)\mathrm{dt} = \int \Im[\mathbf{U}e^{\jmath\omega t}] = \Im[\frac{1}{\jmath\omega}\mathbf{U}e^{\jmath\omega t}] \tag{12.5}$$

Integrodiferenciální rovnice se tak tranformují na algebraické rovnice, které je mnohem snazší řešit.

12.3 Komplexní imitance

S pomocí komplexní transformace si ukážeme vzorce pro napětí a proudy na jednotlivých součástkách. Podíváme se také na jejich časové průběhy a fázorové diagramy, které jsou reprezentací v komplexní rovině viz obr.(12.1).



Obrázek 12.1: Poměry v časové a komplexní oblasti na rezistoru

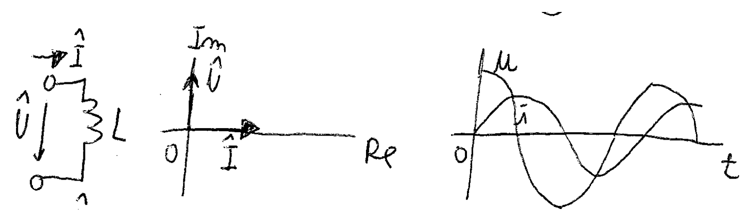
V případě rezistoru se nic nemění. Pouze napětí a proudy jsou tentokrát fázory.

$$\mathbf{U} = R\mathbf{I}, \mathbf{I} = G\mathbf{U} \tag{12.6}$$

Podle fázorového diagramu jsou fázory napětí a proudu ve fázi. V časové oblasti jsou tedy také ve fázi. U induktoru už to není tak jednoduché.

$$\mathbf{U} = \jmath\omega L\mathbf{I}, \mathbf{I} = \frac{1}{\jmath\omega L}\mathbf{U} \tag{12.7}$$

Podle fázorového diagramu je mezi fázorem napětí a proudu fázový rozdíl $\pi/2$ viz obr.(12.2).

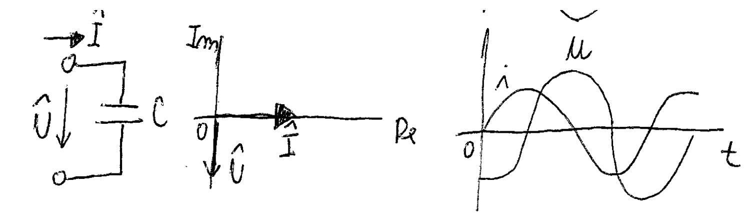


Obrázek 12.2: Poměry v časové a komplexní oblasti na induktoru

V časové oblasti tedy napětí předbíhá proud o stejnou fázi. Situace u kapacitoru je přesně opačná.

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\jmath\omega C}\mathbf{I}, \mathbf{I} = \jmath\omega C\mathbf{U} \tag{12.8}$$

Podle fázorového diagramu viz obr.(12.3) je mezi fázorem proudu a napětí fázový rozdíl $\pi/2$. V časové oblasti tedy proud předbíhá napětí o stejnou fázi.



Obrázek 12.3: Poměry v časové a komplexní oblasti na kapacitoru

Ve stejnosměrných obvodech je vztah mezi napětím a proudem definován parametrem odpor a vodivost. V komplexní rovině se zavádějí pojmy impedance a admitance nazvané souhrně komplexní imitance.

$$\mathbf{U} = \mathbf{ZI}, \mathbf{I} = \mathbf{YU} \tag{12.9}$$

Jsou to komplexní čísla ale ne fázory, protože v časové oblasti nemají žádný ekvivalent.

$$\mathbf{Z} = Ze^{\jmath\varphi} = R + \jmath X \tag{12.10}$$

$$\mathbf{Y} = Ye^{\jmath\psi} = G + \jmath B \tag{12.11}$$

Impedance se skládá z reálné a imaginární části. Reálná část je rezistance a vyjadřuje ztráty v rezistoru. Imaginární část je reaktance a vyjadřuje změny elektromagnetické energie. Reálná část admitance je konduktance a je to vlastně svod. Imaginární část je susceptance a vyjadřuje změny elektromagnetické energie. Z toho plyne, že rezistor a vodivost jsou prvky čistě ztrátové, protože mají jen reálnou část. Kapacitor a induktor jsou prvky čistě reaktanční, protože mají jen imaginární část a dochází jen ke změnám energie.

12.4 Výkon

Také výkon má svou komplexní reprezentaci. Jeho reálná část se nazývá činný výkon a vyjadřuje výkon ztrátových prvků. Imaginární část se nazývá jalový výkon a vyjadřuje výkon reaktančních prvků. Modul se nazývá zdánlivý výkon. Jejich výpočet plyne snadno z komplexního tvaru.

$$P = UI\cos\varphi[W] = \frac{1}{2}\Re[\mathbf{UI}^*] \tag{12.12}$$

$$Q = UI\sin\varphi[var] = \frac{1}{2}\Im[\mathbf{UI}^*] \tag{12.13}$$

$$S = UI[VA] = \frac{1}{2}|\mathbf{UI}^*| \tag{12.14}$$

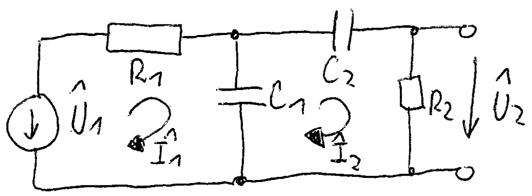
V rovnici se objevují komplexně sdružené fázory proudu, protože nás zajímá rozdíl fází mezi fázory. Kdyby nebyl komplexně sdružený, tak by se počítal součet fází. Dále se definuje pojem účiník, který je kosinem fáze výkonu.

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S} \tag{12.15}$$

Vyjadřuje podíl činného výkonu z celkového výkonu. Z energetického hlediska je to důležitý parametr, protože pouze činný výkon může konat práci. Jalový výkon představuje pouze změny elektromagnetické energie, ale nemá využití.

12.5 Obvodová analýza

V komplexní oblasti se používají stejné metody jako v oblasti časové. Ukážeme si příklad použití metody smyčkových proudů. Obvod viz obr.(12.4) vede na dvě rovnice.



Obrázek 12.4: Příklad obodu v harmonickém ustáleném stavu

$$R_1\mathbf{I}_1 + \frac{1}{\jmath\omega C_1}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{U}_1 \tag{12.16}$$

$$\frac{1}{\jmath\omega C_1}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + \frac{1}{\jmath\omega C_2}\mathbf{I}_2 + R_2\mathbf{I}_2 = 0 \tag{12.17}$$

Tato soustava rovnic se dá poměrně dobře řešit. Z praktických důvodů se přepisuje do maticové podoby, protože jakákoliv neznámá se pak dá vypočítat pomocí Cramerova pravidla.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{\jmath\omega C_1} & -\frac{1}{\jmath\omega C_1} \\ -\frac{1}{\jmath\omega C_1} & R_2 + \frac{1}{\jmath\omega C_1} + \frac{1}{\jmath\omega C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (12.18)$$

V komplexní oblasti se dále zavádí pojem přenos, který nemá v časové oblasti ekvivalent. Je to podíl libovolného výstupního fázoru ku libovolnému vstupnímu fázoru. Nejčastěji se určuje napěťový přenos.

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} \qquad (12.19)$$

12.6 Literatura

[1] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 1, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002

Kapitola 13

Přechodné jevy

13.1 Přesné zadání

- Analýza přechodných jevů
- Přechodný jev v obvodech prvního řádu
- Přechodný jev v obvodech druhého řádu
- Impulsní a přechodová charakteristika

13.2 Analýza přechodných jevů

Přechodné jevy jsou děje probíhající v obvodech, které jsou časově omezené. Setkáme se s nimi při spínání nebo rozpojování obvodů. Obvod je obecně popsán soustavou integrodiferenciálních rovnic, které lze pomocí eliminace převést na jednu diferenciální rovnici.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \tag{13.1}$$

Rovnice je nehomogenní a na pravé straně je budící veličina obvodu. Řešení diferenciální rovnice se skládá z obecného a partikulárního řešení.

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \tag{13.2}$$

Obecné řešení se získá z řešení homogenní rovnice a partikulární z řešení nehomogenní rovnice. V teorii obvodů se tato řešení také nazývají přechodné a ustálené. Přechodné řešení je přechodný jev, který závisí pouze na obvodovém zapojení. Proto se neuvažuje buzení. Ustálené řešení závisí na charakteru buzení a vyjadřuje stav, do kterého se obvod dostane po ukončení přechodného jevu. Přechodné řešení se počítá z kořenů charakteristické rovnice.

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{13.3}$$

$$y_0(t) = A_n e^{\lambda_n t} + A_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} + \cdots + a_1 e^{\lambda_1 t} \tag{13.4}$$

Všechny kořeny mají ve stabilních obvodech zápornou reálnou část. Díky tomu má přechodný jev odeznívající charakter. Kořeny s kladnou reálnou částí se mohou objevit v obvodech s řízenými zdroji a takové obvody jsou pak nestabilní. Při řešení diferenciální rovnice řádu n, potřebujeme znát n počátečních podmínek $y(0+), y^{'}(0+), \cdots, y^{n-1}(0+)$. Ustálené řešení se nehledá z diferenciální rovnice ale z obvodového zapojení po ukončení přechodného jevu. Přechodné jevy se obecně dělí na dva typy. Odezva obvodu na zdroj je reakce na připojení zdroje. V takovém případě jsou počáteční podmínky nulové. Odezva obvodu na počáteční podmínky nastává po odpojení zdroje. Počáteční podmínky jsou potom napětí a proudy na součástkách v okamžiku odpojení.

13.3 Obvody prvního řádu

Jsou to obvody, které se dají popsat diferenciální rovnicí prvního řádu, protože obsahují jeden akumulátor energie. V podstatě je to RC a RL článek. Obvodové rovnice těchto obvodů jsou následující.

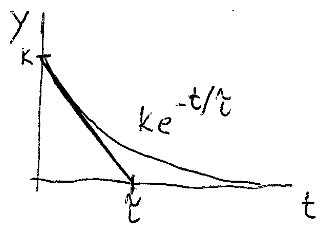
$$C\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c - u(t)}{R} = 0 \Rightarrow RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u(t) \tag{13.5}$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} - u(t) = 0 \Rightarrow \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{u(t)}{R} \tag{13.6}$$

V obou případech jsme dostali v principu stejnou rovnici.

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = x(t) \Rightarrow y_0(t) = Ke^{-t/\tau} \tag{13.7}$$

$\tau = RC = R/L$ se nazývá časová konstanta a udává dobu, za kterou by odezněl přechodný jev při lineárním poklesu viz obr.(13.1). Pokles je však exponenciální, který obecně nedosáhne nuly. Za dobu 5τ, však poklesne na 0.01 své původní hodnoty a můžeme jev považovat za odeznělý.



Obrázek 13.1: Obecné řešení rovnice prvního řádu

Ukážeme si řešení obvodu při při připojení stejnosměrného zdroje napětí. V takovém případě je partikulární řešení rovno konstantě. Ve stejnosměrných obvodech je napětí a proud v součástkách konstantní. Obecné řešení diferenciální rovnice je následující.

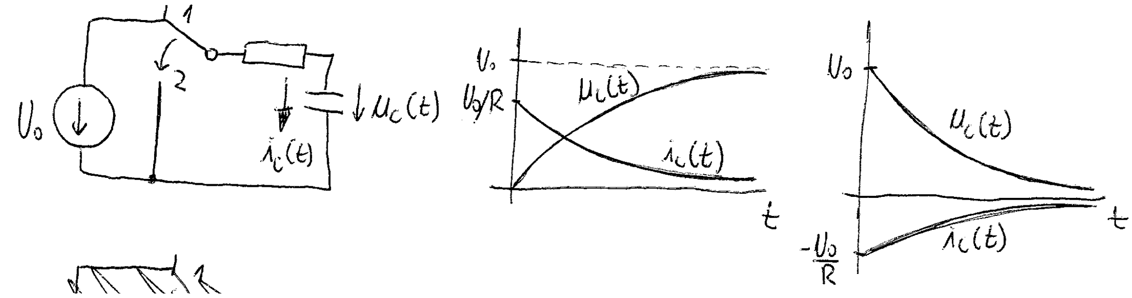
$$y(t) = Ke^{-t/\tau} + y(\infty) \Rightarrow y(0+) = K + y(\infty) \Rightarrow y(t) = y(\infty) + [y(0+) - y(\infty)]e^{-t/\tau} \tag{13.8}$$

Ukážeme si řešení při připojení a odpojení zdroje k obvodu s kapacitorem nebo induktorem. Nejprve uvažujme osamocený kapacitor, ke kterému se připojí zdroj napětí. Počáteční napětí je nulové a v ustáleném stavu se kapacitor nabije na napětí zdroje viz obr.(13.2).

$$u_c(t) = U_0 + [0 - U_0]e^{-t/\tau} \Rightarrow u_c(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}), i_c(t) = \frac{U_0}{R}e^{-t/\tau} \tag{13.9}$$

Při odpojení zdroje je počáteční napětí rovnou napětí zdroje a v ustáleném stavu se kapacitor vybije.

$$u_c(t) = U_0e^{-t/\tau}, i_c(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-t/\tau} \tag{13.10}$$

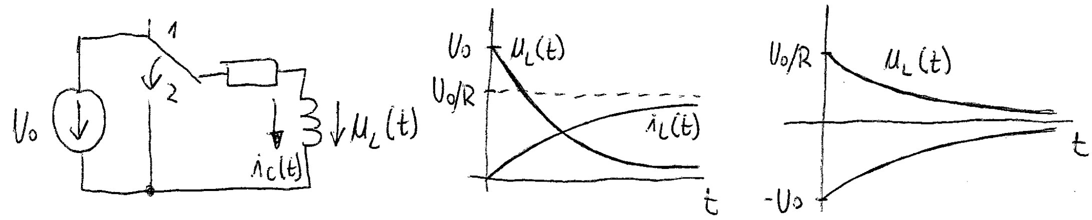


Obrázek 13.2: Přechodový jev při připojení a odpojení zdroje od obvodu s kapacitorem

Obvod s induktorem se řeší stejně, proto si ukážeme pouze výsledné vztahy viz obr.(13.3)

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}), u_L(t) = U_0 e^{-t/\tau} \tag{13.11}$$

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}, u_L(t) = -U_0 e^{-t/\tau} \tag{13.12}$$



Obrázek 13.3: Přechodový jev při připojení a odpojení zdroje od obvodu s induktorem

13.4 Obvody druhého řádu

Tyto obvody obsahují kapacitor a induktor, a proto se dají popsat diferenciální rovnicí druhého řádu. Ukážeme si pouze příklad sériového RLC obvodu, ke kterému se připojí stejnosměrný zdroj napětí. Obvodová rovnice je následující.

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt + u_c(0+) = 0 \Rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{13.13}$$

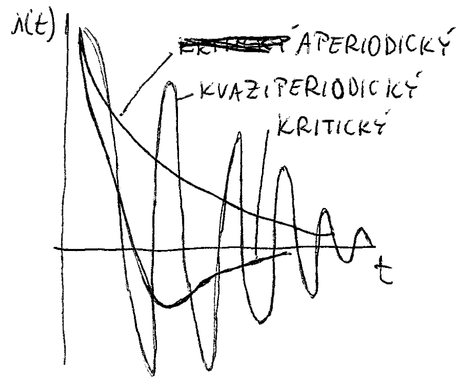
Kořeny charakteristické rovnice jsou tyto.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2} \tag{13.14}$$

Nové členy v rovnici mají význam tlumení obvodu a rezonanční frekvence. Rozlišujeme tři případy řešení podle kořenů.

- Aperiodický děj - $\alpha^2 > \omega_r^2 \Rightarrow i(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$
- Kritický děj - $\alpha^2 = \omega_r^2 \Rightarrow i(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}$
- Kvaziperiodický děj - $\alpha^2 < \omega_r^2 \Rightarrow i(t) = e^{-\alpha t}(K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t)$

Graficky jsou jednotlivé děje znázorněné na obr.(13.4). Při aperiodickém ději se nemění polarita proudu a pouze amplituda exponenciálně ubývá k ustálené hodnotě. Při kvaziperiodickém ději amplituda také exponenciálně ubývá, ale přechod k ustálenému stavu je periodický. Kritický děj je hranice mezi. Pokles je exponenciální, ale polarita se stačí změnit. Přechod do ustáleného stavu je nejrychlejší.



Obrázek 13.4: Přechodový děj v obvodu druhého řádu

13.5 Přenosové charakteristiky

Tyto charakteristiky popisují reakci obvodu na připojení Diracova impulsu a jednotkového skoku. Podle toho se nazývají impulsová a přechodová charakteristika. Jsou to tedy přechodné jevy, ale neřeší se pomocí diferenciálních rovnic. Využívá se přechod do komplexní oblasti pomocí Laplaceovy transformace. Nejprve se podíváme na impulsovou charakteristiku. Laplaceův obraz Diracova impulsu je 1.

$$Y(p) = P(p)X(p) \Rightarrow W(p) = P(p)1 \Rightarrow w(t) = L^{-1}[P(p)] \tag{13.15}$$

Impulsová charakteristika je tedy pouze vzorem přenosu obvodu. Ukážeme si příklad RC článku.

$$P(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{RC}\frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \Rightarrow w(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}1(t) \tag{13.16}$$

Nyní se podíváme na přechodovou charakteristiku. Laplaceův obraz jednotkového skoku je 1/p.

$$Y(p) = P(p)X(p) \Rightarrow A(p)\frac{P(p)}{p} \Rightarrow a(t) = L^{-1}\left[\frac{P(p)}{p}\right] \tag{13.17}$$

Výpočet přechodové charakteristiky je sice složitější, ale v praxi se používá často. Je mnohem snadnější připojit k obvodu jednotkové napětí než Diracův impuls. Impulsová charakteristika se z přechodové pak dá vypočítat.

$$A(p) = \frac{W(p)}{p} \Rightarrow a(t) = \int w(t)dt \Rightarrow w(t) = \frac{da}{dt} + a(0+)\delta(t) \tag{13.18}$$

13.6 Literatura

[1] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 1, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002
[2] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 2, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002

Kapitola 14

Kmitočtové charakteristiky

14.1 Přesné zadání

- Kmitočtové charakteristiky
- Souvislosti mezi časovou a kmitočtovou oblastí
- Amplitudové a fázové kmitočtové závislosti

14.2 Kmitočtové charakteristiky

Kmitočtové charakteristiky reprezentují chování obvodu na různých frekvencích. Když se obvod vybudí harmonickým signálem, tak odezva bude také harmonická. Vztah mezi vstupem a výstupem je dán přenosem obvodu.

$$Y(\jmath\omega) = \mathbf{F}(\jmath\omega)X(\jmath\omega) \tag{14.1}$$

Do kmitočtové oblasti se z časové dostaneme pomocí Fourierovy transformace.

$$F[x(t)] = \int_{\infty}^{\infty} x(t)e^{-\jmath\omega t}\mathrm{dt} \tag{14.2}$$

Definiční vztah je velmi podobný Laplaceově transformaci. Pouze se omezujeme na imaginární osu komplexní roviny. Přenosová funkce se vždy vyjadřuje jako racionální funkce. Polynomy v čitateli i jmenovateli se dají rozložit na součin kořenových činitelů.

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = K\frac{\prod_{k=1}^{m}(\jmath\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^{n}(\jmath\omega - p_k)} \tag{14.3}$$

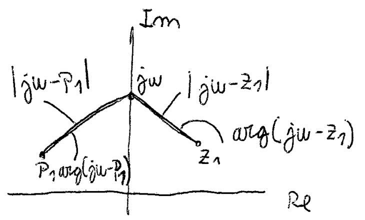
V čitateli se objevují nuly, ve kterých má přenosová funkce nulovou hodnotu. Ve jmenovateli jsou póly, ve kterých má přenosová funkce nekonečnou hodnotu. Komplexní funkce se dá vyjádřit v exponenciálním tvaru pomocí amplitudové a fázové charakteristiky.

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = |\mathbf{F}(\jmath\omega)|e^{arg(\jmath\omega)} \tag{14.4}$$

$$F(\omega) = K\frac{\prod_{k=1}^{m}|\jmath\omega - z_k|}{\prod_{k=1}^{n}|\jmath\omega - p_k|} \Rightarrow F_{dB}(\omega) = 20\log K + \sum_{k=1}^{m} 20\log|\jmath\omega - z_k| - \sum_{k=1}^{n} 20\log|\jmath\omega - p_k| \tag{14.5}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{m} arg(\jmath\omega - z_k) - \sum_{k=1}^{n} arg(\jmath\omega - p_k) \tag{14.6}$$

Kmitočtová charakteristika se dá podle nul a pólů dobře interpretovat. Na imaginární ose komplexní roviny si zolíme požadovanou frekvenci. Nula a pól je komplexní číslo, které má v komplexní rovině svou polohu. Vzdálenost polohy od frekvence je modul a úhel, který vektor svírá s reálnou osou je fáze. Názorně je to vidět na obr.(14.1).



Obrázek 14.1: Demonstrace definice kmitočtové charakteristiky

Modulová charakteristika se kvůli jednodušímu výpočtu udává v logaritmické míře. Násobení se tak převede na součet. Výpočet kmitočtové charakteristiky je obecně pracný, ale v jednoduchých příkladech se dají charakteristiky aproximovat ručně. Charakteristika v takovém případě má trochu jiný tvar.

$$(\jmath\omega - p_k) = (\jmath\omega + \omega_k) = \omega_k(1 + \frac{\jmath\omega}{\omega_k}) \tag{14.7}$$

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = K\frac{\prod_{k=1}^{m}\omega_{ak}(1+\frac{\jmath\omega}{\omega_{ak}})}{\prod_{k=1}^{n}\omega_{bk}(+\frac{\jmath\omega}{\omega_{bk}})} = K^{'}\frac{\prod_{k=1}^{m}(1+\frac{\jmath\omega}{\omega_{ak}})}{\prod_{k=1}^{n}(+\frac{\jmath\omega}{\omega_{bk}})} \tag{14.8}$$

Tento tvar kořenových činitelů je výhodnější pro kreslení.

14.3 Bodeho aproximace

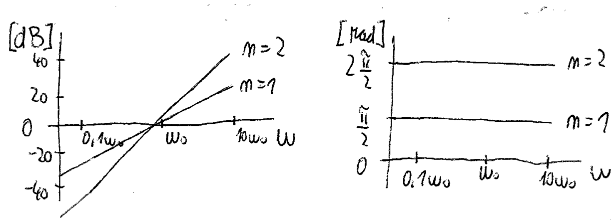
Je zřejmé, že výpočet charakteristiky se provádí jako superpozice charakteristik jednotlivých kořenových činitelů. Ukážeme si všechny možné případy.

Nulový kořen

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = \frac{\jmath\omega}{\omega_0} \tag{14.9}$$

$$F(\omega) = 20\log\frac{\omega}{\omega_0}, \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \tag{14.10}$$

Modulová charakteristika je v logaritmické míře přímkou. V bodě $\omega = \omega_0$ má hodnotu 0 dB a má sklon 20 dB na dekádu. To znamená, že na desetinásobné frekvenci vzroste hodnota o 20 dB. Fázová charaktristika je konstanta. Názorně je to vidět na obr.(14.2).



Obrázek 14.2: Kmitočtové charakteristiky nulového kořene

Násobný nulový kořen
V případě, že je nulový kořen násobný, tak se pouze trochu změní charakteristiky z předchozího případu.

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = \left(\frac{\jmath\omega}{\omega_0}\right)^n \tag{14.11}$$

$$F(\omega) = n20\log\frac{\omega}{\omega_0}, \varphi(\omega) = n\frac{\pi}{2} \tag{14.12}$$

Modulová charakteristika má pouze jiný sklon. Fázová charakteristika je znovu konstantní s jinou hodnotou viz obr.(14.2).
Reálný záporný kořen

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = \left(1 + \frac{\jmath\omega}{\omega_0}\right) \tag{14.13}$$

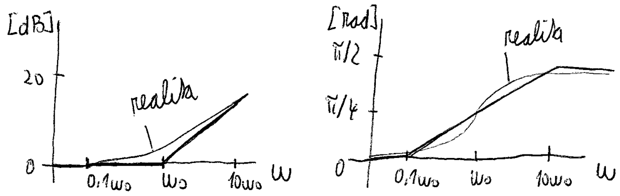
$$F(\omega) = 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \varphi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{\omega_0} \tag{14.14}$$

V tomto případě se při kreslení musí použít Bodeho aproximace, která samozřejmě není přesná.

$$\frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow F(\omega) = 0, \varphi(\omega) = 0 \tag{14.15}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow F(\omega) = 20\log\frac{\omega}{\omega_0}, \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \tag{14.16}$$

Průběh mezi se aproximuje přímkou viz obr.(14.3). Fázová charakteristika je aproximována velmi dobře. U modulové je největší odchylka 3 dB na zlomové frekvenci.



Obrázek 14.3: Kmitočtové charakteristiky reálného záporného kořene

Kladný reálný kořen

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = \left(1 - \frac{\jmath\omega}{\omega_0}\right) \tag{14.17}$$

$$F(\omega) = 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

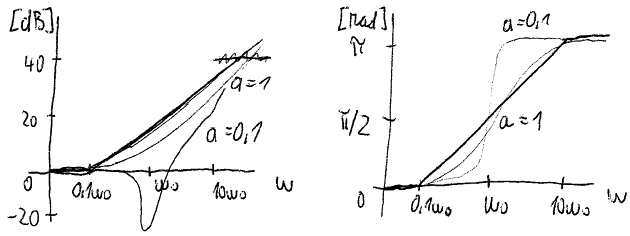
Modulová charakteristika je stejná jako v předchozím případě. Fázová je převrácená. Tyto kořeny určují stabilitu obvodu. Stabilní obvody mají póly umístěny v levé polorovině komplexní roviny. Kořeny tohoto typu se tedy mohou objevit pouze v čitateli kmitočtové charakteristiky.
Dvojice komplexně sdružených kořenů

$$\mathbf{F}(\jmath\omega) = \left(\frac{\jmath\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2a\frac{\jmath\omega}{\omega_0} + 1 \tag{14.19}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow F(\omega) = 0, \varphi(\omega) = 0 \tag{14.20}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow F(\omega) = 2 \cdot 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}, \varphi(\omega) = 2\frac{\pi}{2} \tag{14.21}$$

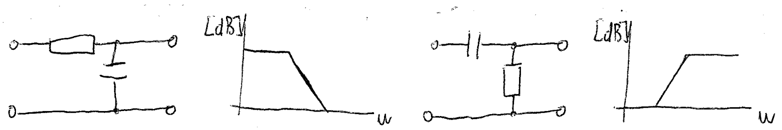
Průběh mezi se obecně nedá dobře aproximovat. Hodně záleží na $|a|$ a aproximace se od správného průběhu může hodně lišit. Pomocí obvodů s komplexně sdruženými kořeny se dají realizovat rezonátory, což vysvětluje průběh v $\omega = \omega_0$. Příklady jsou na obr.(14.4).



Obrázek 14.4: Kmitočtové charakteristiky dvojice komplexně sdružených kořenů

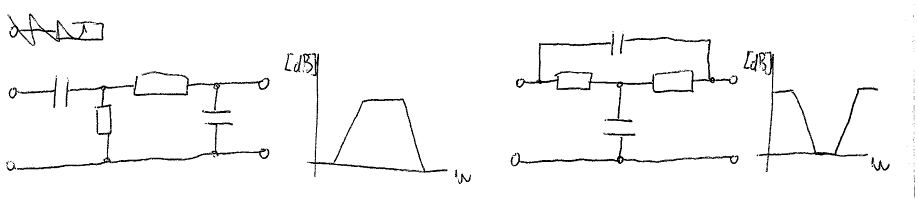
14.4 Amplitudové charakteristiky filtrů

Každý obvod je ve skutečnosti filtrem, protože jeho vlastnosti závisí na frekvenci. Ukážeme si charakteristiky filtrů jako jednoduché příklady. Je známo, že obyčejný RC článek funguje jako dolní propust a CR článek jako horní propust. Výpočtem se dá snadno ověřit následující tvar modulové charakteristiky viz obr.(14.5).



Obrázek 14.5: Dolní a horní propust

Dalšími typy filtrů jsou pásmová propust a pásmová zádrž. Na nich lze demonstrovat superpozici charakteristik jednotlivých kořenových činitelů. Pásmová propsut se dá realizovat jako kaskáda horní a dolní propusti. Pásmová zádrž by se analogicky měla realizovat kaskádou dolní a horní propusti. To není zcela pravda, protože se realizuje přemostěním viz obr. (14.6).



Obrázek 14.6: Pásmová propust a zádrž

14.5 Literatura

[1] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 1, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002
[2] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 2, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002

Kapitola 15

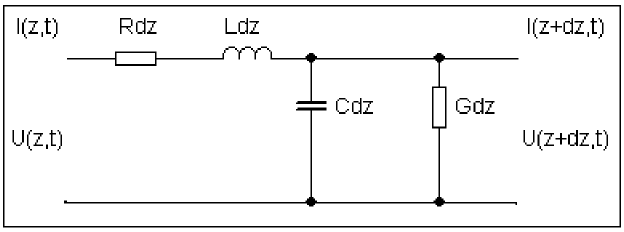
Vedení

15.1 Přesné zadání

- Obvody s rozprostřenými parametry
- Bezeztrátové nekonečné vedení
- Vedení konečné délky
- Odrazy vln

15.2 Obvody s rozprostřenými parametry

Klasické obvody se soustředěnými parametry mají energii elektromagnetického pole soustředěnou do konečného počtu obvodových prvků. U obvodů s rozprostřenými parametry tomu tak není. Při jejich řešení je nutné uvažovat vlnový charakter obvodových veličin, neboli hodnoty naměřené na různých místech vodičů jsou různé. U soustředěných obvodů jsou průběhy v každém místě vodiče stejné. Zde se budeme zabývat pouze případem vedení, které se dá rozumně řešit pomocí obvodových metod. Kvůli rozprostřeným parametrům se takové vedení dá modelovat pomocí nekonečného množství součástek. Na obr.(15.1) je ukázán model elementárního úseku vedení s parametry odpor, vodivost, kapacita a indukčnost.



Obrázek 15.1: Obvodový model elementárního úseku vedení

Tento obvod se dá snadno řešit pomocí Kirchhoffofových zákonů.

$$u(z,t) = i(z,t)R\mathrm{dz} + \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}L\mathrm{dz} + u(z+dz,t) \tag{15.1}$$

$$i(z,t) = u(z,t)G\mathrm{dz} + \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}C\mathrm{dz} + i(z+dz,t) \tag{15.2}$$

Využitím definice parciální derivace se soustava dá upravit do následujícího tvaru.

$$-\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{15.3}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gu(z,t) + C\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \tag{15.4}$$

Tato soustava rovnic již neobsahuje parametry elementárního úseku vedení. Dá se tedy použít k řešení libovolného problému. Nejdůležitějším případem je harmonický ustálený stav, kdy napětí i proud jsou harmonické. Soustava rovnic se převede do následujícího tvaru.

$$-\frac{d\mathbf{U}}{dz} = (R + \jmath\omega L)\mathbf{I} \tag{15.5}$$

$$-\frac{d\mathbf{I}}{dz} = (G + \jmath\omega C)\mathbf{U} \tag{15.6}$$

Parciální diferenciální rovnice se tak převedly na obyčejné. Pomocí eliminační metody se soustava dvou rovnic prvního řádu dá převést na jednu rovnici druhého řádu.

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dz^2} = (R + \omega L)(G + \jmath\omega C)\mathbf{U} = \gamma^2\mathbf{U} \tag{15.7}$$

Nový pojem se nazývá konstanta šíření.

$$\gamma = \sqrt{(R + \jmath\omega L)(G + \jmath\omega C)} = \alpha + \jmath\beta \tag{15.8}$$

Jeho reálná část se nazývá činitel útlumu a imaginární část fázová konstanta, které vyjadřují změnu amplitudy a fáze podél vedení. Řešením vlnové rovnice jsou harmonické funkce.

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_1 e^{-\gamma z} + \mathbf{A}_2 e^{\gamma z} \tag{15.9}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{A}_1 e^{-\gamma z} - \mathbf{A}_2 e^{\gamma z}}{\mathbf{Z}_0} \tag{15.10}$$

Řešením je superpozice vlny přímé a zpětné, která se většinou objevuje při odrazech. Ve vztahu pro proud se objevuje charakteristická impedance vedení.

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + \jmath\omega L}{G + \jmath\omega C}} = |\mathbf{Z}| e^{\jmath\varphi_z} \tag{15.11}$$

Ta vyjadřuje amplitudový a fázový vztah mezi fázory napětí a proudu.

15.3 Bezeztrátové nekonečné vedení

Bezeztrátové vedení má nulový podélný odpor a příčnou vodivost. Charakteristická impedance je pak čistě reálná a činitel útlumu je nulový. Takové vedení tedy netlumí, ale pouze mění fázi

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{15.12}$$

$$\gamma = \jmath\omega\sqrt{LC} = \jmath\beta \tag{15.13}$$

Výpočet indukčnosti a kapacity vedení je obecně velmi komplikovaný. Dobře řešitelné jsou pouze případy dvouvodičového a koaxiálního vedení. Jestliže je vedení nekonečně dlouhé, vyskytuje se zde pouze vlna přímá. Definujme pojem impedance vedení v určitém místě vedení.

$$\mathbf{Z}(z) = \frac{\mathbf{U}(z)}{\mathbf{I}(z)} = \frac{\mathbf{U}_1 e^{-\jmath\beta z}}{\frac{\mathbf{U}_1}{Z_0} e^{-\jmath\beta z}} = Z_0 \tag{15.14}$$

Impedance v libovolném místě vedení je tedy rovna charaktristické impedanci. Takové vedení se nazývá impedančně přizpůsobené. Na takovém vedení nemohou nastat odrazy, což potvrzuje předpoklad šíření přímé vlny.

15.4 Vedení konečné délky

Na takovém vedení se již vyskytuje kromě přímé vlny i zpětná. Na konci vedení je nějaká obecná zátěž, kde dokážeme změřit napětí. Tato hodnota se použije jako okrajová podmínka pro řešení fázorů napětí a proudu v libovolném místě vedení.

$$\mathbf{U}(l-z) = \mathbf{U}_k \left(\cosh(\gamma(l-z)) + \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_k} \sinh(\gamma(l-z)) \right) \tag{15.15}$$

$$\mathbf{I}(l-z) = \mathbf{U}_k \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_k} \cosh(\gamma(l-z)) + \frac{1}{\mathbf{Z}_0} \sinh(\gamma(l-z)) \right) \tag{15.16}$$

Dalším charakteristickým znakem konečného vedení je proměnlivost impedance.

$$\mathbf{Z}(l-z) = \frac{\mathbf{U}(l-z)}{\mathbf{I}(l-z)} = \mathbf{Z}_k \frac{1 + \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_k} \tanh(\gamma(l-z))}{1 + \frac{\mathbf{Z}_k}{\mathbf{Z}_0} \tanh(\gamma(l-z))} \tag{15.17}$$

Zavedená symbolika souřadnice vyjadřuje vzdálenost od konce vedení.

15.5 Odrazy vln

Na vedení konečné délky může docházet k odrazům vln v místech, kde se stýkají dvě vedení s různou charakteristickou impedancí. Část vlny se odrazí a část projde. To vyjadřují činitel odrazu a prostupu pro napěťovou vlnu.

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{U}_r}{\mathbf{U}_i} = \frac{\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1} \tag{15.18}$$

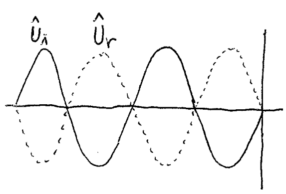
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{U}_t}{\mathbf{U}_i} = \frac{2\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1} \tag{15.19}$$

Protože činitele jsou komplexní čísla, tak se mění amplituda i fáze prošlé a odražené vlny. Ukážeme si nejdůležitější příklady vedení na konci zkratovaného a otevřeného.

$$\mathbf{R}_{short} = -1 \Rightarrow \mathbf{U}_r = \mathbf{U}_i e^{\jmath\pi}, \mathbf{I}_r = \mathbf{I}_i \tag{15.20}$$

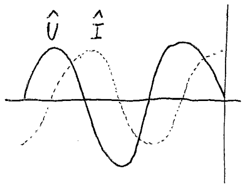
$$\mathbf{R}_{open} = 1 \Rightarrow \mathbf{U}_r = \mathbf{U}_i, \mathbf{I}_r = \mathbf{I}_i e^{\jmath\pi} \tag{15.21}$$

Na těchto extrémních zakončovacích impedancích nastává totální odraz, protože vlna neprojde. Podle okrajové podmínky je na zkratu nulové napětí, a proto se napěťová vlna odráží v protifázi. Na otevřeném konci je nulový proud, a proto se v protifázi odráží proudová vlna. Druhá veličina se odráží ve fázi. Na obr.(15.2) je situace znázorněna pro napěťovou vlnu na zkratovaném vedení.



Obrázek 15.2: Přímá a odražená napěťová vlna na zkratovaném vedení

Přímá a odražená vlna se superponují a vzniká stojaté vlnění, které nepřenáší výkon. Na zkratu má napěťová stojatá vlna uzel a proudová tam má kmitnu viz obr.(15.3). U rozpojeného vedení je situace opačná.



Obrázek 15.3: Napěťové a proudové stojaté vlny na zkratovaném vedení

Stojaté vlnění je nežádoucí jev, a proto se vedení navrhují jako impedančně přizpůsobená, kde k odrazům nedochází. Ještě si ukážeme průběh impedance na zkratovaném vedení viz obr.(15.4). U otevřeného vedení je situace analogická.

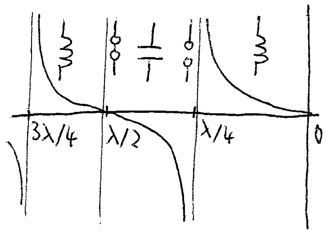
$$z = \lambda/8 \Rightarrow Z = \jmath X \tag{15.22}$$

$$z = \lambda/4 \Rightarrow Z = \infty \tag{15.23}$$

$$z = 3\lambda/8 \Rightarrow Z = -\jmath X \tag{15.24}$$

$$z = \lambda/2 \Rightarrow Z = 0 \tag{15.25}$$

Impedance se podél vedení mění periodicky s periodou $\lambda/2$.



Obrázek 15.4: Průběh impedance na zkratovaném vedení

15.6 Literatura

[1] Mikulec M., Havlíček V., Základy teorie elektrických obvodů 2, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002

Kapitola 16

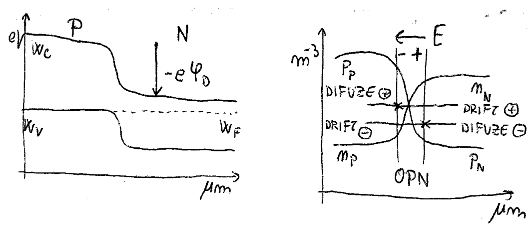
Základní vlastnosti polovodičů, elektronika číslicových obvodů

16.1 Přesné zadání

- Přechod PN
- Bipolární tranzistory PNP a NPN
- Unipolární tranzistory JFET a MOSFET
- Struktury hradel, parametry, charakteristiky, spojení více hradel, budiče sběrnic
- Klopné obvody
- Paměťové buňky SRAM, DRAM, EPROM, EEPROM, FLASH

16.2 Přechod PN

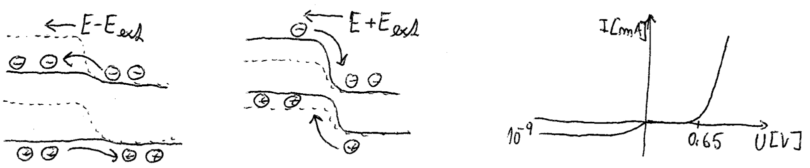
PN přechod je základní strukturou, ze které se realizují polovodičové součástky. Je vyroben nejčastěji z křemíku, kde jedna část je vodivosti N a druhá P. Polovodič N se vyrábí z intrinsického polovodiče dotací fosforových donorů, které poskytují elektron. Polovodič P se vyrábí dotací borových akceptorů, které přijímají elektron. Když se k sobě přiblíží polovodiče P a N, tak vznikne PN přechod. Na obr.(16.1) jsou vidět energetické pásy, na kterých je zřejmá energetická bariéra zvaná difúzní potenciál, kterou elektrony a díry nemohou sami překonat. Na koncentračním profilu je vysvětlen tranport nosičů. Elektrony jsou majoritní v polovodiči N, a tak difundují do oblasti P, kde jsou minoritní podle Fickova zákona. V oblasti styku polovodičů vzniká oblast prostorového náboje s velmi silným elektrickým polem, které způsobuje bariéru. Minoritní elektrony v části P kvůli poli driftují do oblasti N. Difúzní potenciál je závislý na koncentracích částic a běžně nabývá hodnoty 0.7 V.



Obrázek 16.1: Pásový diagram a koncentrační profil PN přechodu

Nejjednodušší součástka je dioda a realizuje se připojením elektrod na PN přechod. Dioda pracuje v propustném a závěrném režimu. Pokud má vnější pole opačný směr než vnitřní pole, tak se sníží bariéra a nosiče mohou difundovat. Dioda vede majoritní proud. Pokud má vnější pole stejnou orientaci, tak se bariéra ještě zvýší a dioda vede pouze minoritní proud, který je mnohem menší než majoritní viz obr.(16.2). Na stejném obrázku je zobrazena voltampérová charakteristika diody s vymezením propustného a závěrného režimu. Tato závislost je popsána Shocleyovou rovnicí, kde se vyskytuje závěrný neboli saturační proud.

$$I = I_s(e^{eU/kT} - 1) \tag{16.1}$$



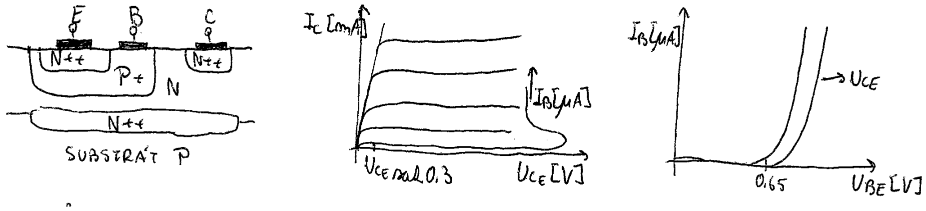
Obrázek 16.2: Pásový diagram v propustném a závěrném režimu a VA charakteristiky diody

Mezi základní typy diod patří následující.

- PN - odpovídá předchozímu rozboru.
- Shottkyho - využívá přechod kov-polovodič a vede pouze majoritní proud. Proto se využívá při vypínacích procesech.
- PIN - má navíc intrinsickou oblast. Využívá se jako detektor.
- Stabilizační - pracuje v závěrném režimu. Zenerova využívá Zenerův jev a lavinová lavinový jev. Využívá se jako stabilizátor napětí.
- Varikap - Pracuje v závěrném režimu jako napěťově řízený kapacitor.
- Tunelová - Má oblast se záporným diferenciálním odporem. Využívá se v mikrovlnných zesilovačích.

16.3 Bipolární tranzistory

Skládá se ze dvou PN přechodů. Podle orientace přechodů se dělí na NPN a PNP. Základní struktura NPN tranzistoru je na obr.(16.3). Součástka má tři elektrody: emitor, báze, kolektor. Kvůli dvěma přechodům existují čtyři režimy tranzistoru.



Obrázek 16.3: Struktura a výstupní, vstupní chcrakteristika NPN tranzistoru

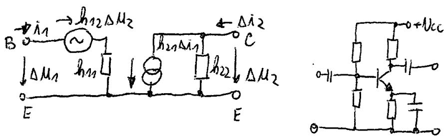
- Nevodivý - Oba přechody jsou polarizovány závěrně. Elektrony z emitoru nepřekonají bariéru. Do kolektoru se dostanou pouze minoritní elektrony z báze. Protéká velmi malý proud.
- Aktivní - Přechod BE je polarizován propustně a přechod BC závěrně. Elektrony z emitoru se dostanou do úzké báze a většina jich projde do kolektoru. Nastává tranzistorový jev, který se používá k zesilování.

- Inverzní - Přechod BE je polarizován závěrně a přechod BC propustně. Elektrony z kolektoru se dostávají do emitoru. Dochází k zesílení, ale bipolární tranzistory nejsou navrženy pro tento režim. Využití je malé.
- Saturace - Oba přechody jsou polarizovány propustně. Elektrony z emitoru i kolektoru procházejí bez problémů. Tranzistor je v sepnutém stavu, pokud se používá ve spínačích. V zesilovačích je to nežádoucí jev kvůli malému zesílení.

Tyto režimy jsou demonstrovány na vstupní a výstupní voltampérové charakteristice. V obvodech se tranzistory modelují jako dvojbrany s h parametry viz obr.(16.4). Nejčastěji se používají jako zeslivače v aktivním režimu. Existují tři základní zapojení.

- SE společný emitor - Na vstupu je báze a na výstupu kolektor. Zapojení zesiluje napětí i proud.
- SC společný kolektor - Na vstupu je báze a na výstupu emitor. Zapojení zesiluje proud.
- SB společná báze - Na vstupu je emitor a na výstupu kolektor. Zapojení zesiluje napětí.

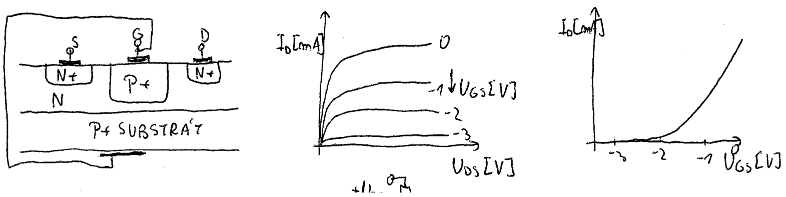
Na obr.(16.4) je ukázka střídavého zesilovače SE s odporovým děličem pro nastavení pracovního bodu a vazebními kondenzátory pro oddělení stejnosměrné složky.



Obrázek 16.4: H model tranzistoru a zapojení SE zesilovače

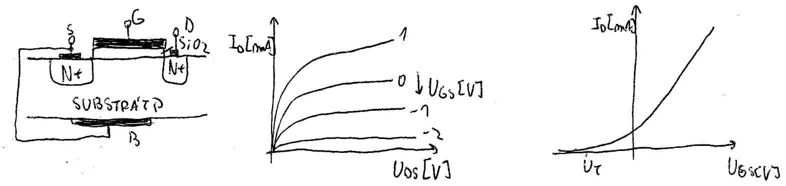
16.4 Unipolární tranzistory

Od bipolárních se liší tím, že vedou pouze majoritní nosiče. Prvním typem je JFET, který má elektrody source, gate a drain viz obr.(16.5). Elektrony se ze source dostanou do drainu pomocí napětí U_{DS}. Napětí U_{GS} je závěrné a proto se rozšiřuje OPN, která brání průchodu elektronů. Jakmile se kanál zaškrtí, tak už nedochází k nárůstu proudu viz VA charakteristiky na obr.(16.5). Charakteristika má odporovou a saturační oblast.



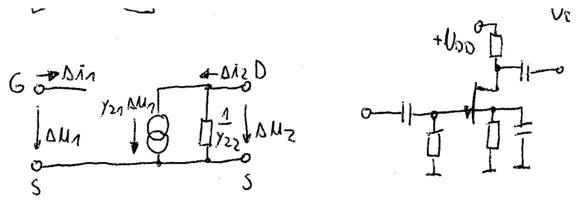
Obrázek 16.5: Struktura a výstupní, převodní charakteristika tranzistoru JFET

Dalším typem unipolárních tranzistorů je MOSFET viz obr.(16.6). Pod elektrodou gate je dielektrická vrstva, která brání průchodu proudu. Když se na gate přiloží kladné napětí, tak se přitáhnou elektrony a při určité koncentraci dojde k vytvoření inverzní vrstvy N, přestože polovodič je typu P. Potom dochází k transportu elektronů ze source do drainu. Na VA charakteristice je vidět, že tranzistor vede proud i při záporném přiloženém napětí. To nastane v případě, kdy tranzistor má zabudovaný kanál. Pokud ho nemá, tak je potřeba přiložit kladné napětí. Tranzistory se podle toho dělí na zabudované a indukované kanály. V praxi se však častěji používají indukované.



Obrázek 16.6: Struktura a výstupní, převodní charakteristika tranzistoru MOSFET

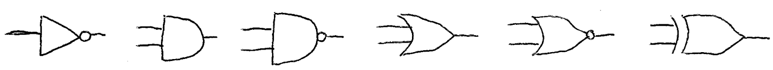
Unipolární tranzistory se modelují jako dvojbrany s parametry y, protože proud v gate je nulový viz obr.(16.7). Základní zapojení zesilovačů jsou SS, SD, SG s vlastnostmi analogickými jako v bipolárních tranzistorech. Na obr.(16.7(je zapojení SS s JFETem a odpory pro nastavení pracovního bodu a vazebními kondenzátory.



Obrázek 16.7: Y model tranzistoru a zapojení SS zesilovače

16.5 Logická hradla

Takové obvody jsou schopně realizovat logické operace. Základní hradla jsou na obr.(16.8).



Obrázek 16.8: Logická hradla INV, AND, NAND, OR, NOR, XOR

Invertor je zcela jasný, protože pouze převrací logickou úroveň. V následující tabulce jsou znázorněny operace AND, NAND, OR, NOR, XOR.

A	B	A $\cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	A + B	$\overline{A + B}$	A $\bigoplus B$
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0

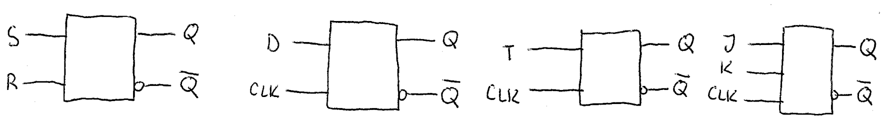
Existuje mnoho realizací hradel. Nejznámější jsou rodiny TTL, ECL, STTL, CMOS. Invertor se realizuje pouhým tranzistorem, který pracuje ve spínacím režimu a přepína tak mezi úrovněmi log. 0 a log. 1. Operace NAND a NOR se realizují ze čtyř tranzistorů. Tvoří takzvaný úplnný logický systém, protože se z nich dají realizovat všechny další operace. Další hradla jsou již složitější. Základní parametry hradel jsou následující.

- Logická úroveň - Intervaly napětí, které odpovídají logickým úrovním. Log. 0 je často 0.4 - 0.8 V a log. 1 je 2 - 2.4 V. Mezi nimi je pásmo, které nemá přiřazeno úroveň.
- Šumová imunita - Napěťové fluktuace, které hradlo toleruje aniž by se změnila logická úroveň.
- Logický zisk - maximální počet vstupů hradla.
- Zpoždění - zpoždění změny logické úrovně. Je způsobeno nabíjením vstupní kapacity.

Důležitým jednoduchým obvodem je budič sběrnice. Nejčastěji se používá třístavový budič se stavy 0, 1, Z. V prvních dvou stavech se na sběrnici posílá napětí příslušné logické úrovně. Třetí stav je stav s vysokou impedancí, kdy je hradlo odpojeno od sběrnice a nezatěžuje ji. Výstupní tranzistory jsou vypnuty. Budič sběrnice se realizuje obyčejným hradlem se vstupem pro signál, který hradlo od sběrnice odpojí.

16.6 Klopné obvody

Logická hradla řadíme mezi obvody kombinační. Klopné obvody patří mezi obvody sekvenční. V číslicové technice se nejčastěji používají bistabilní obvody, které mohou nabývat dvou stavů. Základní typy jsou následující viz obr.(16.8).



Obrázek 16.9: Klopné obvody R-S, D, T, J-K

- R-S - Jeho zkratka je odvozena od reset set. Při určité kombinaci vstupních hodnot dokáže tedy výstup nastavit do log. 0 nebo log.1. Jeho nevýhodou je zakázaný stav.
- D - Používá se jako registr reagující na hranu hodinového signálu.
- T - Přepínací registr řízený hranou hodin.
- J-K - Vylepšený obvod R-S, který nemá zakázaný stav.

Pravdivostní tabulky klopných obvodů jsou následující.

R	S	Q		D	Q		T	Q		J	K	Q
0	0	Q_{n-1}		0	0		0	Q_{n-1}		0	0	Q_{n-1}
0	1	1		1	1		1	$\overline{Q_{n-1}}$		0	1	0
1	0	0								1	0	1
1	1	$\times$								1	1	$\overline{Q_{n-1}}$

16.7 Paměti

Paměti slouží k uchování informace. Některé důležité typy jsou tyto.

- SRAM - Static random access memory. Paměť s náhodným přístupem, ve které jsou bity uloženy v klopných obvodech. Jsou rychlé, ale mají malou kapacitu.
- DRAM - Dynamic RAM. Oproti SRAM se bity neuchovávají v klopných obvodech ale jako náboje na kondenzátorech. Kvůli vybíjení se musí provádět refresh. Jsou pomalejší než SRAM, ale lépe využívají kapacitu.
- EPROM - Eraseable programmable read only memory. Oproti RAM se informace pouze uloží a už se nedá měnit. EPROM umožňuje informaci vymazat po ozáření ultrafialovým světlem.
- EEPROM - Electronically EPROM. Informace se dá mazat programem.
- FLASH - Paměti s velmi rychlým mazáním, které jsou trvanlivé a obsah paměti se dá měnit mnohokrát.

16.8 Literatura

[1] Vobecký J., Záhlava V., Elektronika - součástky a obvody, principy a příklady, Grada, 2001
[2] Richard E., Dorf C., The electrical engineering handbook, CRC Press LLC, 2000
[3] Slípka J., Navrhování mikroprocesorových systémů, SNTL, 1985

Kapitola 17

Základy programování

17.1 Přesné zadání

- Algoritmus a jeho vlastnosti, způsoby vyjádření algoritmů
- Proměnná, výrazy, řídící struktury
- Procedury, funkce, iterační a rekurzivní výpočty
- Textové a binární soubory, ukazatele
- Statické a dynamické datové struktury

17.2 Algoritmus

Algoritmus je postup pro řešení nějaké úlohy. Je tvořen posloupností jednoznačně definovaných příkazů a pro přípustná vstupní data se v konečném počtu kroků vždy najde správný výsledek. V programování platí následující rovnice.

$$\text{ALGORITMUS} + \text{DATA} = \text{PROGRAM}$$

Obecné vlastnosti algoritmu jsou následující.

- Hromadnost - Vstupní data jsou měnitelná.
- Determinovanost - Každý krok je jednoznačně definován.
- Resultativnost - Pro přípustná data se vždy najde výsledek.
- Konečnost - Výsledek se najde po konečném počtu kroků.

Algoritmus se dá vyjádřit různými způsoby.

- Přirozený jazyk - slovní popis řešení problému.
- Vývojový diagram - orientovaný graf s přechody mezi kroky.
- Strukturogram - tabulka s přechody mezi kroky.
- Pseudojazyk - kombinace přirozeného a programovacího jazyka.
- Programovací jazyk - popis problému ve formě srozumitelné pro kompilátor.

17.3 Proměnná, výrazy, řídící struktury

Proměnná je datový objekt, který je označen jménem. Je v něm uložena hodnota, která se dá měnit přiřazením. Proměnná se vytváří deklarací.

```
int i; i = 45;
```

Výraz je určitá operace, která má nějaký výsledek. Může obsahovat proměnné, matematické, logické, relační operátory, konstanty a závorky. Vyhodnocení je závislé na prioritě a asociativitě operátorů.

```
(x - y) * (x + 4), --x, x | y
```

Řídící struktury jsou konstrukce, které se skládají z dílčích příkazů, které se provádějí za určitých podmínek. Patří mezi ně větvení, kdy se příkaz provede při splnění podmínky a cykly, kdy se příkazy při splnění podmínky provádějí opakovaně. Příklady řídících struktur jsou následující.

- IF - Příkaz se provede při splnění podmínky.
  `IF (podmínka) příkaz`
- IF ELSE - Oproti IF má příkaz, který se provede při nesplnění podmínky.
  `IF (podmínka) příkaz1 ELSE příkaz2`
- WHILE - Dokud je splněna podmínka, tak se provádí příkaz.
  `WHILE (podmínka) příkaz`
- DO WHILE - Narozdíl od WHILE se příkaz v prvním kroku provede a až pak se ověřuje platnost podmínky. Příkaz se tedy provede alespoň jednou.
  `DO příkaz WHILE (podmínka)`
- FOR - Používá se v případech, kdy dopředu známe počet kroků cyklu.
  `FOR (i = 1; i <= n; i++) příkaz`

17.4 Funkce

Funkce je programová konstrukce, která provádí určitou posloupnost operací. Je to tedy jakýsi miniprogram, který se v hlavním programu dá využívat. Hlavní výhodou funkcí je přenositelnost do jiných programů, kde nemusíme neustále programovat věci, které již byly dříve vyřešeny. Výsledný kód je pak mnohem kratší a přehlednější. Příkladem funkce může být výpočet délky přepony pomocí Pythagorovy věty ze zadaných délek odvěsen. Funkce má obecně následující tvar.

```
typ jméno(specifikace parametrů) příkazy; return výsledek;
```

Funkce má tedy nějaký název a také je definován datový typ výsledku, který funkce vrací. Specifikace parametrů je seznam proměnných, které se ve výpočtu používají a jejich typy. Funkce vždy vrací výsledek, což je vyjádřeno příkazem return. Speciálním typem funkce je procedura, která má návratový typ void neboli nevrací nic. Příkladem je funkce, která ukončuje program, pokud uživatel zadá nepřípustná data. Existují dva základní přístupy jak řešit problémy. Iterace realizuje výpočet zdola nahoru, kdy se nejprve výpočet provádí na nejjednodušší úrovni a postupně se zesložiťuje. Oproti tomu rekurze realizuje výpočet shora dolů, kdy funkce volá sama sebe a výpočet se provádí na stále jednodušší úrovni. Rozdíl mezi přístupy lze demonstrovat na výpočtu mocniny.

$$\text{iterace } A^5 = A \times A \times A \times A \times A$$
$$\text{rekurze } A^5 = A \times A^4, A^4 = A \times A^3, A^3 = A \times A^2, A^2 = A \times A$$

17.5 Soubory a ukazatele

Soubor je množina údajů uložená v paměti počítače, která umožňuje několik základních funkcí: otevření, čtení, zápis, uzavření. K datům lze přistupovat sekvenčně, kdy se čte po řádcích nebo nahodile. Se soubory se sekvenčním přístupem se setkáváme nejčastěji. Soubory dělíme na následující typy.

- Textové - Dají se snadno prohlížet a modifikovat libovolným textovým editorem. Jednotlivé znaky jsou vyjádřeny kódem jehož příkladem je ASCII nebo Unicode.
- Binární - Nepoužívá se žádný kód, ale data se z paměti zapisují přímo. Z toho důvodu je práce s těmito soubory mnohem rychlejší a jednotlivé znaky zabírají menší prostor, protože se nekódují. Pro běžného uživatele nemají využití, ale v profesionálních programech se využívají pro ukládání velkých objemů dat.

Zajímavou proměnnou je ukazatel, který se častěji nazývá pointer. Proměnná v sobě obsahuje nějakou hodnotu. Pointer se liší tím, že ukazuje na určitou adresu v paměti, kde je hodnota uložena. Adresa samotného pointeru není zajímavá. Pointery se často používají v programech, které pracují na nízké hardwareové úrovni, kde se přímo pracuje s pamětí. Jsou součástí assemblerů nebo jazyka C. Naopak jazyk Java pointery nemá, protože jeho použití je směrováno do oblasti objektů a Internetu.

17.6 Statické a dynamické datové struktury

Datová struktura je množina dat, pro kterou jsou stanoveny určité operace a způsob její implementace. Statická datová struktura obsahuje neměnný počet složek. Příkladem je pole, řetězec, třída. Dynamická datová struktura má proměnlivý počet složek. Typickými operacemi jsou přidání nebo odebrání prvku. Příkladem je zásobník, fronta, tabulka.

17.7 Literatura

[1] Slidy předmětu X36ALG Algoritmizace
[2] Herout P., Učebnice jazyka C, Kopp, České Budějovice, 2001

Kapitola 18

Programovací jazyky

18.1 Přesné zadání

- Programovací jazyky, syntaxe, sémantika
- Standardní datové typy
- Strukturované datové typy pole, funkce, procedury a jejich parametry
- Strukturované programování, jazyk C a jeho koncepce, základní datové typy

18.2 Programovací jazyky

Programovací jazyky slouží pro zápis programů do formy srozumitelné počítači. Dělíme je na strojové orientované a vyšší. Příkladem strojově oriantovaných jsou strojové kódy a assemblery. Vyšší jsou všechny ostatní tedy C/C++/C ♯, Java, PHP atd. Důležité charakteristiky jazyků jsou syntaxe a sémantika. Syntaxe je soubor pravidel, který udává přípustné tvary jednotlivých konstrukcí. Sémantika udává význam konstrukcí. Jsou dvě metody, jak zpracovat kód do formy srozumitelné počítači.

- Kompilace - Program se pomocí kompilátoru převede do strojového kódu, který je vlastním jazykem procesoru. Příkladem je jazyk C s kompilátorem ANSI C.
- Interpretace - Program se pomocí překladače převede do vnitřní formy, která se pomocí interpretu interpretuje. Příkladem je jazyk Java s vnitřní formou byte code a interpretem Java virtual machine JVM.

18.3 Standardní datové typy

Mezi základní datové typy, které se objevují ve většině jazyků jsou následující.

- Celočíselný typ int - reprezentace celých čísel v pevné řádové čárce
- Reálný typ float - reprezentace reálných čísel v plovoucí řádové čárce
- Znakový typ char - reprezentace písmen a dalších znaků
- Logický typ boolean - Uchovává výsledek logické operace true/false.
- Literál - řetězcová konstanta "ahoj"

18.4 Pole a funkce

Pole je datový typ, který se skládá z prvků stejného typu, které jsou uspořádané. Samotné pole má svůj název, ale jednotlivé prvky ho nemají. Odkazujeme se na ně pomocí indexu. Díky tomu se tak prvky dají snadno najít. Nejčastěji se pracuje s poli jednorozměrnými a dvojrozměrnými méně již s trojrozměrnými. Jednorozměrná pole jsou obyčejné posloupnosti čísel a znaků, které se často nazývají řetězce string. Dvojrozměrná pole se používají při práci s tabulkami a obrázky. Trojrozměrná lze využít při reprezentaci objemových dat. Pokud jsou rozměry pole neměnné, tak se nazývá statické. V opačném případě je to pole dynamické.
Funkce je miniprogram, který obsahuje posloupnost příkazů. Příkladem je výpočet obsahu kruhu ze zadaného poloměru. Funkce jsou základem procedurálního programování. Obecná struktura funkce je následující.

```
typ jméno(specifikace parametrů) příkazy; return výsledek;
```

Funkce vrací výsledek určitého datového typu. Funkce pracuje s parametry, u kterých musí být zadány jejich názvy a typy. Funkce vždy něco vrací, což je vyjádřeno příkazem return. Speciálním typem je funkce je procedura, která nic nevrací. Příkladem je výpis chybové hlášky na konzoli.

18.5 Jazyk C

Jazyk C je představitelem procedurálních programovacích jazyků, je tedy založen na funkcích. Problém se rozkládá na podproblémy. Vytvářejí se abtraktní příkazy, které se nejprve specifikují a poté se programují příslušné funkce. Jeho autory jsou Brian W. Kernighan a Denis M. Ritchie, kteří napsali bibli C The C Programming Language. Je to jazyk nízké úrovně, který se v efektivitě blíží assembleru. Pracuje pouze se základními datovými typy a v základní verzi nepodporuje práci s poli, řetězci a I/O operacemi. Díky tomu je nezávislý na typu počítače a operačního systému. Je to mateřský jazyk systému UNIX, ale kvůli přenositelnosti se využívá i pod Windows. Nepodporované operace se řeší speciálními knihovnami a hlavičkovými soubory. V současnosti se používá standard ANSI C, který pro I/O operace obsahuje hlavičkový soubor `stdio.h`. C je jazyk kompilační. Základní datové typy v C jsou následující.

- Celočíselný - int, long, short
- Reálný - float, double, long double
- Znakový - char
- Literál - řetězcová konstanta

Typ boolean zde není, ale logické hodnoty se reprezentují jako int 1/0. Datové typy existují ve znaménkové verzi signed a neznaménkové unsigned. C poskytuje řídící struktury IF, IF ELSE, WHILE, DO WHILE, FOR, SWITCH. Důležitou součástí jazyka jsou pointery, které se často využívají při práci s dynamickými poli a s dynamickou alokací paměti. Pointery jsou charakteristickým rysem jazyků nízké úrovně. C se také používá při programování procesorů, DSP a FPGA, pro které existují příslušné překladače do assembleru. Jazyk C se neustále vyvíjí a za jeho největí rozšíření lze považovat C++, které je objektově orientované. Dalším počinem je C $\sharp$, které je více orientované na oblast Internetu.

18.6 Literatura

[1] Slidy předmětu X36ALG Algoritmizace
[2] Herout P., Učebnice jazyka C, Kopp, České Budějovice, 2001

Kapitola 19

Objektově orientované programování

19.1 Přesné zadání

- Objektově orientované programování, objekty, třídy
- Dědičnost, polymorfismus
- Výjimky
- Jazyk Java a jeho koncepce, základní datové typy

19.2 Objektově orientované programování

Objektové programování se od procedurálního odlišuje v jednom základním bodě. Vytváří se nové datové typy a definují se operace, se kterými typy budou pracovat. V procedurálním programování se problém rozkládá na podproblémy, pro které se programují příslušné funkce. Základním objektovým pojmem je **třída**, která obsahuje soubor proměnných a podprogramů. Nazývají se členské proměnné, které definují stav objektu a metody, které určují shcopnosti objektu. Samotná třída k ničemu není, dokud se podle ní nevytvoří **objekt**, který pracuje s členskými proměnnými a metodami třídy. Třída je tedy jakási šablona, jak vytvořit instanci čili objekt. Příklad třídy je následující.

```
class Obdelnik {
int sirka, vyska;
int obsah() { return sirka * vyska; } }
```

Objekt, který je vytvořen podle třídy Obdelnik tedy využívá proměnné sirka, vyska a metodu obsah(). Pro vytvoření objektu je nutné vytvořit referenční proměnnou, která bude odkazovat na objekt, který má alokovanou paměť.

```
Obdelnik obd = new Obdelnik();
```

Alokace paměti se provádí operátorem new a obd je referenční proměnná na objekt typu Obdelnik. Nyní obd má přiřazeny vlastní proměnné sirka, vyska a může využívat metodu obsah(). Proměnné je potřeba nastavit neboli inicializovat. To se provádí **konstruktorem**.

```
Obdelnik(int sirka, int vyska) {
this.sirka = sirka; this.vyska = vyska; }
```

Pokud se konstruktor neobjeví, tak se proměnné nastaví na nulu, protože existuje implicitní konstruktor, o který se stará jazyk sám. Může nastat situace, kdy na vytvořený objekt už neexistuje odkaz. V jazyce C++ se nic neděje, což může vést k zahlcení paměti. V Javě so o to stará garbage collector, který objekt z paměti vymaže.

19.3 Pilíře objektových jazyků

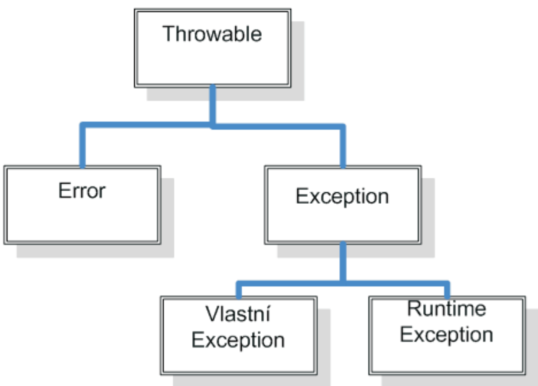
Prvním pilířem je **zapouzdření dat**. S daty se dá bez problémů manipulovat pomocí metod příslušné třídy. Přístup k datům zvenčí je komplikovanější a existuje několik přístupových práv.

- `int sirka` - S proměnno se dá manipulovat z libovolné třídy balíku, ze kterého je vlastní třída.
- `private int sirka` - S proměnnou se dá manipulovat pouze ve vlastní třídě.
- `public int sirka` - S proměnnou se dá manipulovat z libovolné třídy.

Druhým pilířem je **dědičnost**. Zavádí se pojem rodičovská třída, podle které chceme děděním vytvořit třídu potomka, která je specializovanější. Dědičnost umožňuje využívat vše, co obsahuje rodičovská třída. Zároveň také můžeme metody měnit a přidávat vlastní. Příkladem může být třída kvádr, která obsahuje proměnné strana x, strana y, strana z a metody pro výpočet objemu a tělesové úhlopříčky. Děděním vznikne třída obdélník, který je speciální případem kvádru s nulovou výškou. Potomek jistě využije proměnné strana x a strana y. Metoda pro výpočet objemu je zbytečná, protože zde si můžeme dotvořit metodu pro výpočet obsahu. Metoda pro výpočet úhlopříčky se překryje a modifikuje, protože v kvádru a obdélníku se to počítá jinak. Třetím pilířem objektových jazyků je **polymorfismus**. Ten má mnoho společného s dědičností. Uplatní se při tvorbě více potomků jedné obecné rodičovské třídy, která často bývá abstraktní. Taková třída obsahuje abstraktní metody, které jsou ve vlastní třídě deklarované, ale chybí konkrétní implementace. Předpokládá se, že potomek metodu překryje a vytvoří si ji podle vlastních potřeb. Příkladem může být abstraktní třída těleso, která obsahuje abstraktní metodu pro výpočet objemu. Děděním vzniknou potomci kvádr, koule, kužel, jehlan a válec. Každý potomek překryje metodu pro výpočet objemu, ale implementace bude jiná pro různé typy těles.

19.4 Výjimky

Mechanismus výjimek je prvek, pomocí kterého se program zabezpečuje proti chybám, které mohou při běhu nastat. Typickým příkladem je malá paměť, dělení nulou, nepřípustné vstupní údaje atd. Hierarchie výjimek v jazyce Java je na obr.(19.1).



Obrázek 19.1: Hierarchie výjimek

Throwable je zcela obecný typ výjimky. Error jsou výjimky, které se mohou objevit v interpretu JVM a na které se nereaguje, protože je v programu ošetřit nedokážeme. Příkladem je OutOfMemoryError. RuntimeException jsou asynchronní výjimky, které se mohou objevit kdekoli v programu. Má ale smysl na ně reagovat pouze na místech, kde si myslíme, že by mohla nastat. Příkladem je NumberFormatException, která se může objevit na místě, kde uživatel má zadat číslo, ale omylem zadá písmeno. Další podtřídy třídy Exception jsou synchronní výjimky, které by programátor měl ošetřovat. Příkladem je IOException. Na výjimku se dá reagovat třemi způsoby.

- Předání výše - Pokud se výjimka objeví, tak se zahodí a předá na vyšší místa. Nejméně vhodný způsob.
- Kompletní ošetření - Výjimka se detekuje a program na ní reaguje. Java využívá konstrukce `try {} catch (typ výjimky) {}`. V bloku try se vyskytuje kritické místo, kde může k výjimce dojít. V bloku catch se výjimka detekuje a reaguje se na ni.
- Ošetření a předání - Výjimka se detekuje, ošetří a informace se předá výše.

19.5 Jazyk Java

Java je objektový jazyk postavený na principech C/C++ původně určený pro elektronické přístroje s vestavěným procesorem. Java je slangový výraz pro espresso. Vyvinula ho firma Sun Microsystems. Původně se nejvíce používala pro programování apletů, což jsou aplikace vkládané do webových stránek, ale později se stala obecně použitelným jazykem, který je přenositelný mezi různými platformami. Java se neustále vyvýjí a vznikají stále nové distribuce JDK, které obsahují inovované knihovny tříd Java Core API. Je to interpretační jazyk. Program se nejprve přeloží do vnitřní formy byte kódu, se kterým pracuje intepret Java Virtual Machine JVM. Základní datové typy jsou následující.

- Celočíselný - byte, short, int, long
- Reálný - float, double
- Logický - boolean
- Znakový - char
- Literály - řetězcová konstanta. Existuje i řetězec string.

Obsahuje řídící struktury IF, IF ELSE, WHILE, DO WHILE, FOR, SWITCH. Běžně pracuje s poli a řetězci. Je to jazyk plně objektový. Mezi jeho přednosti patří mechanismus výjimek, rozhraní, podpora GUI a Internetu. Jazyk však není vhodný pro práci na nízké hardwareové úrovni, protože neobsahuje nezbytné pointery.

19.6 Literatura

[1] Herout P., Učebnice jazyka Java, Nakldatelství Kopp, České Budějovice, 2001

Kapitola 20

Programovací techniky a algoritmy

20.1 Přesné zadání

- Abstraktní datový typ, jeho specifikace a implementace
- Datový typ zásobník, fronta, tabulka, strom, seznam
- Základní algorimty řazení
- Základní algoritmy vyhledávání
- Složitost algoritmů

20.2 Abstraktní datový typ

Datový typ neboli datová struktura je určitý soubor dat, pro které jsou definovány relační vztahy a operace, které s nimi můžeme provádět. To je **specifikace** datového typu, která je pouze algebraickým popisem a je zcela nezávislá na konkrétní programové realizaci. V algebře jsou operace reprezentovány zobrazením, které definuje soustava axiomů. **Implementace** je proces transformace algebraické specifikace do kódu programu. Operace se zde realizují pomocí dostupných programových konstrukcí a soustava axiomů je nahrazena posloupností příkazů.

20.3 Datové struktury

Podíváme se na některé základní struktury, které se často používají.
Seznam
Seznam je množina dat, která je uspořádaná. Mezi typické operace patří přidání a odebrání prvku. Pokud předem známe počet prvků, tak se seznam výhodně realizuje v poli. Většinou to ale nevíme. Potom je lepší použít spojový seznam. Rozdělujeme je na jednosměrné, kdy každý prvek ukazuje na svého následníka a obousměrné, kdy každý prvek ukazuje na svého předchůdce i následníka. Spojové seznamy se vytvářejí dynamicky, protože při přidání dalšího prvku se alokuje paměť.
Zásobník
Je speciálním seznamem typu LIFO (Last in - First out). V zásobníku je vždy dostupný jen prvek, který byl vložen jako poslední. Typické operace jsou vložení a výběr prvku z vrcholu. Pokud dopředu známe počet prvků, tak se dá realizovat polem, kde první prvek představuje dno a poslední vrchol. Realizuje se také jednosměrným spojovým seznamem, kdy první uzel reprezentuje vrchol zásobníku.

Fronta
Je speciálním seznamem typu FIFO (First in - First out). Z jedné strany se prvky vkládají a z druhé vybírají. Typické operace jsou vložení a výběr prvku. Pokud známe počet prvků, tak se snadno realizuje polem. Pokud je neznáme, tak se využívá jednosměrný spojový seznam, kdy výstupní stranna začátku seznamu a vstupní strana na konci. Existují modifikace jako obousměrná fronta, kdy lze na obou stranách přidávat i odebírat prvky a prioritní fronta, kdy se prvky nevybírají podle pořadí ale podle určitého klíče.
Tabulka
Tabulka je množina dat, které nejsou uspořádané, ale identifikují se podle klíče. Příkladem je seznam zaměstnanců, kde se vyhledává podle data narození. Typickými operacemi jsou vložení prvku, vyhledávání. Tabulky jsou základem databázových systémů. Dá se realizovat polem, kde index je identifikačním klíčem.
Strom
Strom je speciálním typem grafu, který neobsahuje cykly. Jeden uzel tvoří kořen, ze kterého vycházejí větve na následníky. Každý následník může mít další následníky. V programování se nejčastěji používá binární strom, kdy uzly mají dva následníky. Uzly, které už následníky nemají se nazývají listy. Příkladem takové struktury je hierarchie uvnitř podniku, kde kořen reprezentuje šéf. Jeho následníci jsou nejbližší podřízení, kteří mají za následníky řadové zaměstnance neboli listy stromu. Strom lze realizovat v poli, kdy v každém uzlu máme pole ukazatelů syny. Výhodnější kanonická reprezentace nahrazuje obecný strom stromem binárním. Každý uzel má ukazatele na prvního syna a bratra. S binárním stromemse snáze pracuje.

20.4 Řazení

Metod řazení je celá řada, a tak se podíváme na ty nejznámější. Vychází se z toho, že data máme uložena v poli.
quick sort
V poli se náhodně vybere nějaký prvek X. Poté se prochází spodní i horní částí pole. Prvky, které jsou menší nebo rovny se umístí nalevo a větší prvky nalevo. Prochází se současně oběma částmi pole. Když se najdou dva prvky, kde jeden je menší nebo roven a druhý větší, tak se mezi sebou vymění. Po přeskupení prvků je prvek X na správném místě. V obou zbylých částech se náhodně zvolí prvek a opět se provede přeskupení. Tímto způsobem se rekurzivně pokračuje až do polí se dvěma prvky. Potom je původní pole vzestupně setříděné.
merge sort
Algoritmus je podobný předešlému, protože se v poli určí prostřední prvek. Poloviny se seřadí a poté sloučí do výsledného seřazeného pole. Pole se rekurzivně půlí až do délky dva, které se seřadí snadno. Dvě pole se slučují následovně. Poli se postupně prochází a porovnávají se prvky. Ten menší se umístí do pole a seřazený zbytek se překopíruje.
bubble sort
Postupně se prochází polem a porovnávase dva sousední prvky. Ty se seřadí vzestupně. Na konci průchodu polem je správně seřazen největší prvek. Postup se opakuje rekurzivně s polem zkráceným o jeden prvek až do pole délky dva.

20.5 Vyhledávání

Nejjednodušší algoritmy se používají pro vyhledávání v poli.
Sekvenční procházení
Polem se postupně prochází, dokud nenajdeme požadovaný prvek.
Binární půlení
Před vlastním hledáním se pole vzestupně setřídí. Poté se najde prostřední prvek a porovná se s hledaným. Pokud je větší, tak se hledaný prvek nachází ve spodní polovině. Pokud je větší, tak se nachází v horní polovině. V polovičním poli se půlením pokračuje až do pole délky dva. Tento

algoritmus je podobný vyhledávání v telefonním seznamu, kde neprocházíme seznam od začátku ale podle polohy písmena v abecedě se blížíme hledanému prvku.
Další algoritmy vycházejí z reprezentace pomocí stromu. To se objevuje v úlohách, kde máme soubor různých stavů s definovanými přechody mezi nimi. Klasickým příkladem je problém hledání cesty na šachovnici mezi dvěma body pomocí koně. Každé políčko reprezentuje stav, ze kterého se můžeme dostat pouze na určitá políčka.
Prohledávání do hloubky
Tento algoritmus se také nazývá backtracking. Na začátku se nacházíme v kořeni čili nejvyšším uzlu. Při prohledávání se postupuje stále hlouběji směrem k listům stromu, které reprezentují řešení. Z listu se můžeme vrátit do rodičovského uzlu, ze kterého se dá opět sestupovat k uzlům. Takovýto algoritmus se bude hodit při hledání všech možných cest šachového koně do daného políčka.
Prohledávání do šířky
Tento algoritmus se také nazývá algoritmus vlny. Z kořene stromu se setoupí do prvního následného uzlu. Prohledává se na jedné hladině a pak se sestoupí na následníka. Musí se tedy uchovávat informace nejen o bratrech ale i všech uzlech na stejné hladině. Tento algoritmus se dá použít pro nalezení nejkratší cesty šachového koně, protože kvůli postupnému procházení hladin se jako první list najde ten, který je v nejmenší hloubce.

20.6 Složitost algoritmů

Algoritmy se posuzují podle složitosti paměťové a časové. Paměťová složitost popisuje nutnou velikost operační paměti, která se musí pro běh programu vyhradit. Paměťově neefektivní jsou tedy programy, které obsahují mnoho mezivýpočtů. Časová složitost popisuje čas, po který procesor provádí operace. Algoritmy se tedy navrhují tak, aby byly co nejefektivnější. Optimalizace paměťová a časová jsou často protichůdné parametry. Vhledem k rychlému vývoji výpočetní techniky je důležitějším faktorem optimalizace časová. Při časové nalýze algoritmu se určuje počet nutných operací v závislosti na počtu vstupních dat. Exaktně to nejde, a tak se zkoumá asymptotická složitost tj., jak se algoritmus chová pro vysoký objem vstupních dat. Tato složitost se aproximuje matematickou funkcí a následující typy jsou nejčastější.

- O(log N) - logaritmická složitost. Příkladem je binární vyhledávání.
- O(N) - lineární složitost. Příkladem je sekvenční vyhledávání.
- O(N^2) - kvadratická složitost. Příkladem je vyhledávání v dvojrozměrném poli a DFT.
- O(N^3) - kubická složitost. Příkladem je vyhledávání v trojrozměrném poli.
- O(N log N) - Příkladem je FFT.
- O(2^N) - exponenciální složitost. Příkladem jsou rekurzivní algoritmy.

20.7 Literatura

[1] Hudec B., Programovací techniky, Vydavatelství ČVUT, 2004
[2] Töpfer P., Algoritmy a programovací techniky, Prometheus, 1995