Kapitola 6

Funkce matice

V odstavci 1.4 jsme se setkali s pojmem *funkční matice* (nebo *matice funkcí*). Připomínáme, že funkční maticí jsme rozuměli matici, jejímiž prvky byly funkce na nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Prostor takovýchto matic typu $m \times n$, jejichž všechny prvky byly funkce spojité na I (obecně komplexní) jsme značili symbolem $\mathscr{C}(I; \mathbb{C}^{m\times n})$. Na funkční matici $\mathbf{A} \in \mathscr{C}(I; \mathbb{C}^{m\times n})$ se přitom můžeme dívat jako na zobrazení z I do $\mathbb{C}^{m\times n}$, tj.

$$\mathbf{A} \colon I \to \mathbb{C}^{m\times n}$$

[každému bodu $t \in I$ je přiřazena hodnota $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{C}^{m\times n}$]. Na rozdíl od funkční matice, kde definiční obor jsou (reálná) čísla, budeme *funkcí matice* rozumět zobrazení, jehož definičním oborem i oborem hodnot jsou matice. S jedním takovým zobrazením, mocninou matice (přirozenou mocninou matice), jsme se již setkali. Jelikož mocnina matice je definována pro čtvercové matice, zdá se „přirozené“, že i pro obecnější funkce matic se omezíme na matice čtvercové (dále bude mocnima matic hrát důležitou roli i v definici obecnějších funkcí matic). Obecně tedy můžeme funkcí matice rozumět zobrazení z $\mathbb{C}^{n\times n}$ do $\mathbb{C}^{n\times n}$ nebo z nějaké podmnožiny $\mathbb{C}^{n\times n}$ do $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zde nás přitom nebudou zajímat libovolná takováto zobrazení, ale pouze taková zobrazení, která vzniknou nějakým „rozšířením“ definičního oboru nějaké funkce komplexní proměnné na čtvercové matice.

S analogií takového rozšíření se čtenář setkal např. v souvislosti s definicí některých elementárních funkcí v komplexním oboru. Tak např. exponenciela — $f(x) = \mathrm{e}^x$ — byla původně definována v reálném oboru. Přitom pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Zdá se potom přirozené rozšířit definiční obor f z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$ tak, že pro $z \in \mathbb{C}$ položíme

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Zde je pouze potřeba si uvědomit, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ řada napravo konverguje. Jedna z možností rozšíření exponenciely z $\mathbb{C}$ na čtvercové matice je, že pro $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ položíme

$$f(\mathbf{A}) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Přitom je zde nutné především vhodně definovat pojem součtu nekonečné řady matic a ukázat, že (při této definici) uvažovaná řada konverguje. V dalším se skutečně zastavíme u vyjádření funkcí matic pomocí nekonečných řad. Nejvíc nás bude v souvislosti s aplikacemi pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic zajímat právě maticová exponenciela. Nejprve však uveďme jinou definici funkcí matic, která bude „více algebraická“. Pomocnými pojmy zde budou např. pojmy tzv. anulujícího a minimálního polynomu.

6.1 Minimální polynomy

Jak jme již poznamenali, pro čtvercové matice je definována přirozená mocnina matice. Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, klademe přitom

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \dots, \quad \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k\text{-krát}} \tag{6.1}$$

$(k \in \mathbb{N})$. Dále formálně definujeme

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \tag{6.2}$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice stejného řádu jako $\mathbf{A}$ (tj. v našem případě $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{n\times n}$).

Máme-li definovánu mocninu čtvercové matice, můžeme přirozeným způsobem definovat hodnoty polynomu na maticích. Buď p polynom řádu k,

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k \tag{6.3}$$

(obecně $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$). Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pak definujeme

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^k + a_1\mathbf{A}^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mathbf{A} + a_k\mathbf{E}; \tag{6.4}$$

všimněme si zde faktoru $\mathbf{E}$ u koeficientu a_k — formálně zde místo $\mathbf{E}$ můžeme psát $\mathbf{A}^0$. Je zřejmé, že při této definici je

$$p\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$$

(pro každé dané pevné n). Všimněme si některých jednoduchých vlastností polynomu matice.

6.1.1 Tvrzení. *Nechť p, q jsou polynomy, h jejich součin, tj. $h(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)$. Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pak*

$$p(\mathbf{A})\cdot q(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})\cdot p(\mathbf{A}).$$

Jednoduchý důkaz tohoto tvrzení, který spočívá v rozepsání součinů $h(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)$, $p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})$ a $q(\mathbf{A})p(\mathbf{A})$, přenecháváme čtenáři. Samo o sobě je možná zajímavé, že matice $p(\mathbf{A}), q(\mathbf{A})$ jsou vždy záměnné [tj. $p(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})p(\mathbf{A})$; připomínáme, že násobení matic obecně není komutativní].

6.1.2 Tvrzení. *Buď p polynom, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, a buď $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulární matice. Potom*

$$p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{T}. \tag{6.5}$$

DŮKAZ. Nejprve si všimneme, že pro každé $r \in \mathbb{N}_0$ je

$$\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)^r = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^r\mathbf{T}$$

(srovnejte s úlohou 2.2.7). Je totiž

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)^r &= \underbrace{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\cdots(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})}_{r\text{-krát}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})\cdots(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{A}\mathbf{T} = \\ &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}\cdots\mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{r\text{-krát}}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^r\mathbf{T}\end{aligned}$$

(rozmyslete si případ $r = 0$). Je-li

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k,$$

pak je tedy

$$\begin{aligned}p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) &= a_0\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)^k + a_1\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)^{k-1} + \cdots + a_k\mathbf{E} = \\ &= a_0\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{T} + a_1\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{T} + \cdots + a_k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{T} = \\ &= \mathbf{T}^{-1}(a_0\mathbf{A}^k + a_1\mathbf{A}^{k-1} + \cdots + a_k\mathbf{E})\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{T},\end{aligned}$$

což jsme měli dokázat. □

6.1.3. Rovnost (6.5) můžeme také napsat ve tvaru

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{T}p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}. \tag{6.6}$$

Tato rovnost má jednoduchý smysl např. v případě, že $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná. Buď tedy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizovatelná a buď $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková regulární matice, že

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Snadno je vidět (viz též poznámku 1.4.15), že pro $r \in \mathbb{N}_0$ je

$$\left(\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\right)^r = \operatorname{diag}[\lambda_1^r, \lambda_2^r, \ldots, \lambda_n^r].$$

Je-li

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k,$$

pak tedy

$$\begin{aligned}&p\left(\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\right) = \\ &\quad= a_0 \operatorname{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k] + a_1 \operatorname{diag}[\lambda_1^{k-1}, \lambda_2^{k-1}, \ldots, \lambda_n^{k-1}] + \cdots + a_k\mathbf{E} = \\ &\quad= \operatorname{diag}[a_0\lambda_1^k + a_1\lambda_1^{k-1} + \cdots + a_k, \ldots, a_0\lambda_n^k + a_1\lambda_n^{k-1} + \cdots + a_k] = \\ &\quad= \operatorname{diag}\left[p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)\right] = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Podle (6.6) tak dostáváme, že hodnotu $p(\mathbf{A})$ můžeme napsat ve tvaru

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{T}\,\mathrm{diag}\big[p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)\big]\,\mathbf{T}^{-1}. \tag{6.8}$$

Pokud $\mathbf{A}$ není diagonalizovatelná, můžeme diagonální matici $\mathbf{D}$ nahradit příslušným Jordanovým kanonickým tvarem matice $\mathbf{A}$. Zkusme si rozmyslet, jak vypadá hodnota polynomu v matici, která má Jordanův tvar. Především je třeba zjistit, jak obecně vypadá mocnina Jordanova bloku. Připomeňme, že pro $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, Jordanův blok $\mathbf{J}_m(\lambda)$ je čtvercová matice řádu m a tvaru

$$\mathbf{J}_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Můžeme si uvědomit, že $\mathbf{J}_m(\lambda)$ lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{J}_m(\lambda) = \lambda\mathbf{E} + \mathbf{U}, \tag{6.9}$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu m, $\mathbf{U}$ je čtvercová matice řádu m,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

[vlastně je $\mathbf{U} = \mathbf{J}_m(0)$]. Přenecháváme čtenáři, aby postupným násobením zjistil, že

$$\mathbf{U}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

atd. (každým dalším násobením se jedničky „posunou o jedno místo doprava“); pro $r \geq m$ je přitom $\mathbf{U}^r = \mathbf{0}$.

Pro $r \in \mathbb{N}_0$ je

$$\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big)^r = (\lambda\mathbf{E} + \mathbf{U})^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \lambda^{r-i}\mathbf{U}^i. \tag{6.12}$$

Např. pro konkrétní volbu $m = 5$, $r = 2, 3, 4, 5$, vidíme, že

$$\big(\mathbf{J}_5(\lambda)\big)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad \big(\mathbf{J}_5(\lambda)\big)^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$\big(\mathbf{J}_5(\lambda)\big)^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}, \quad \big(\mathbf{J}_5(\lambda)\big)^5 = \begin{pmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 & 5\lambda \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 \end{pmatrix};$$

zkuste k těmto rovnostem dojít přímým postupným násobením.

V rovnosti (6.12) se objevuje výraz $\binom{r}{i}\lambda^{r-i}$. Tento výraz můžeme napsat ve tvaru

$$\binom{r}{i}\lambda^{r-i} = \frac{r(r-1)\cdots(r-i+1)}{i!}\lambda^{r-i} = \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^r)$$

(výrazem napravo myslíme i-tou derivaci funkce λ^r podle λ). Můžeme tedy psát

$$\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big)^r = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^r)\mathbf{U}^i. \tag{6.13}$$

Nyní můžeme snadno dokázat následující tvrzení.

6.1.4 Věta. *Buď p polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Potom*

$$p\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big) = \begin{pmatrix} p(\lambda & p'(\lambda) & \frac{1}{2!}p''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(m-2)!}p^{(m-2)}(\lambda) & \frac{1}{(m-1)!}p^{(m-1)}(\lambda) \\ 0 & p(\lambda) & p'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(m-3)!}p^{(m-3)}(\lambda) & \frac{1}{(m-2)!}p^{(m-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & p(\lambda) & \dots & \frac{1}{(m-4)!}p^{(m-4)}(\lambda) & \frac{1}{(m-3)!}p^{(m-3)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(\lambda) & p'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Důkaz. Je-li

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k,$$

pak při označení z předchozího odstavce dostaneme z (6.13)

$$p\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big) = a_0\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big)^k + a_1\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big)^{k-1} + \dots + a_k\mathbf{E} = \sum_{j=0}^{k} a_j\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big)^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^{k-j})\mathbf{U}^i = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} a_j \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^{k-j})\mathbf{U}^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}\left(\sum_{j=0}^{k-i} a_j\lambda^{k-j}\right)\mathbf{U}^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}p(\lambda)\mathbf{U}^i.$$

Jelikož mocniny $\mathbf{U}^i$ mají tvar (6.11), pro $i \geq m$ je $\mathbf{U}^i = \mathbf{0}$ a $\mathrm{d}^i p(\lambda)/\mathrm{d}\lambda^i = 0$ pro $i > k$, dostáváme opravdu rovnost (6.14). $\square$

6.1.5. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nechť pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$ je

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{J} = \operatorname{diag}\big[\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1), \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2), \dots, \mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big] \tag{6.15}$$

(tj. $\mathbf{J}$ je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$). Podle poznámky 1.4.15 je (pro $m \in \mathbb{N}_0$)

$$\mathbf{J}^m = \operatorname{diag}\Big[\big(\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)\big)^m, \big(\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)\big)^m, \dots, \big(\mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big)^m\Big].$$

Odtud již snadno zjistíme (podobně jako v odstavci 6.1.3 pro případ diagonalizovatelné matice, že

$$p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = p(\mathbf{J}) = \operatorname{diag}\Big[p\big(\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)\big), p\big(\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)\big), \dots, p\big(\mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big)\Big].$$

Použijeme-li tvrzení 6.1.2, dostáváme tak rovnost

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{T} \cdot \operatorname{diag}\Big[p\big(\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)\big), p\big(\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)\big), \dots, p\big(\mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big)\Big] \cdot \mathbf{T}^{-1}. \tag{6.16}$$

Známe-li Jordanův kanonický tvar čtvercové matice $\mathbf{A}$ a příslušnou transformující matici $\mathbf{T}$, můžeme tedy takto získat hodnotu polynomu v $\mathbf{A}$; hodnoty polynomu v jednotlivých Jordanových blocích přitom dostaneme podle věty 6.1.4.

Nyní konečně vyslovme definici pojmu anulujícího polynomu.

6.1.6 Definice. *Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, p polynom. Řekneme, že p je **anulující polynom matice $\mathbf{A}$**, jestliže p není identicky nulový a přitom*

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regulární matice, pak podle tvrzení 6.1.2 pro každý polynom p platí rovnost

$$p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{T}.$$

Jelikož $\mathbf{T}$ (a tedy také $\mathbf{T}^{-1}$) je regulární, součin $\mathbf{T}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{T}$ je roven nulové matici právě když $p(\mathbf{A})$ je nulová. Podle uvedené rovnosti je tedy $p(\mathbf{A})$ nulová právě když je nulová matice $p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})$. Vidíme tak, že platí následující tvrzení.

6.1.7 Tvrzení. *Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, p netriviální polynom (tj. polynom, který není identicky nulový). Potom p je anulující polynom $\mathbf{A}$ právě když p je anulující polynom každé matice podobné $\mathbf{A}$.*

6.1.8 Poznámka. Z tvrzení 6.1.7 speciálně vidíme, že netriviální polynom p je anulující polynom matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ právě když p je anulující polynom Jordanova kanonického tvaru $\mathbf{A}$. Je-li $\mathbf{J}$ Jordanův kanonický tvar $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\big[\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1), \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2), \dots, \mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big]$$

[kde $\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)$ jsou jednotlivé Jordanovy bloky v tomto kanonickém tvaru], pak z rovnosti (6.16) z odstavce 6.1.5 vidíme, že p je anulující polynom matice $\mathbf{A}$ právě když

$$p\big(\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)\big) = \mathbf{0}$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$ [tj. právě když polynom p je anulující polynom každého Jordanova bloku $\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)$, ze kterých se „skládá“ Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$]. Podle věty 6.1.4 ovšem víme, jak vypadá hodnota polynomu v Jordanových blocích. Z rovnosti (6.14) vidíme, že $p(\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$ právě když

$$p(\lambda_i) = p'(\lambda_i) = \cdots = p^{k_i-1}(\lambda_i) = 0.$$

Spec. tedy vidíme, že pokud p je anulující polynom matice $\mathbf{A}$, pak všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou kořeny p. Pokud pro nějaké i je $k_i > 0$ [připomínáme, že k_i je řád Jordanova bloku $\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)$], pak pro anulující polynom p jsou také hodnoty všech derivací p až do řádu $k_i - 1$ v λ_i nulové. To nastane právě tehdy, je-li násobnost kořene λ_i polynomu p rovna alespoň k_i [rozmyslete si podrobně — stačí k tomu vyjádřit p ve tvaru $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^s q(\lambda)$, kde s je násobnost kořene λ_i]. Víme přitom, že řád k_i Jordanova bloku $\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)$ nemůže být větší než algebraická násobnost vlastního čísla λ_i matice $\mathbf{A}$. Odtud okamžitě vidíme, že platí následující tvrzení.

6.1.9 Věta (Cayleyova-Hamiltonova věta). *Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Potom charakteristický polynom $p_{\mathbf{A}}$ matice $\mathbf{A}$ je anulující polynom $\mathbf{A}$, tj. je vždy*

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Na Cayleovu-Hamiltonovu větu se můžeme dívat (kromě jiného) jako na větu o existenci anulujícího polynomu (ze samotné definice nemusí být zřejmé, že každá čtvercová matice má anulující polynom). Anulující polynom matice není přitom ani zdaleka určen jednoznačně. Je-li p nějaký anulující polynom matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, q libovolný netriviální polynom, pak polynom $h = p \cdot q$ je jistě také anulující polynom $\mathbf{A}$ (to plyne buď z tvrzení 6.1.1 nebo také z úvah z poznámky 6.1.8 — rozmyslete si). Dále nás bude zajímat anulující polynom co nejnižšího stupně.

6.1.10 Definice. *Anulující polynom $M(\lambda)$ matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nejnižšího stupně a s koeficientem 1 u své nejvyšší mocniny se nazývá **minimální polynom matice** $\mathbf{A}$.*

6.1.11 Poznámka. V poznámce 6.1.8 jsme vlastně uvedli úplnou charakteristiku anulujících polynomů matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ v termínech řádu Jordanových bloků v Jordanově kanonickém tvaru $\mathbf{A}$ odpovídajících jednotlivým vlastním číslům $\mathbf{A}$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ jsou všechna *navzájem různá* vlastní čísla $\mathbf{A}$ a nechť pro každé $i = 1, 2, \ldots, s$ je m_i maximální řád Jordanova bloku v Jordanově kanonickém tvaru $\mathbf{A}$, který odpovídá vlastnímu číslu λ_i. Označíme-li nyní

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \tag{6.17}$$

pak $M(\lambda)$ je minimální polynom matice $\mathbf{A}$. Především je vidět, že koeficient u nejvyšší mocniny M je roven 1. Podle poznámky 6.1.8 je M skutečně anulující polynom $\mathbf{A}$. Přitom podle téže poznámky se v každém anulujícím polynomu matice **A** musí objevit kořenový činitel $(\lambda - \lambda_i)$ (pro $i = 1, 2, \ldots, s$) minimálně v m_i-té mocnině, takže M má ze všech anulujících polynomů **A** nejnižší stupeň. Je tedy opravdu M minimální polynom matice **A**. Zároveň vidíme, že minimální polynom je určen jednoznačně a že každý anulující polynom je nějakým násobkem minimálního polynomu. Můžeme tedy vyslovit následující tvrzení:

Každá čtvercová matice má právě jeden minimální polynom.

Každý anulující polynom čtvercové matice **A** *je dělitelný minimálním polynomem* **A**.

Z tohoto tvrzení a Cayleyovy-Hamiltonovy věty plyne okamžitě následující tvrzení:

Charakteristický polynom čtvercové matice **A** *je dělitelný minimálním polynomem matice* **A**.

Kořeny minimálního polynomu matice **A** *jsou právě všechny kořeny charakteristického polynomu a mohou se lišit pouze násobností.*

Toto tvrzení je ostatně vidět přímo z vyjádření minimálního polynomu ve tvaru (6.17), neboť zde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ jsou všechna vlastní čísla **A** a m_i je vždy nejvýše rovno algebraické násobnosti λ_i (a ovšem $m_i \geq 1$). Kromě jiného vidíme, že je

$$\operatorname{st} M = \sum_{i=1}^{s} m_i \leq n,$$

kde n je řád matice **A**.

Rovnost (6.17) přímo udává tvar minimálního polynomu. K tomu je ovšem potřeba znát maximální řády Jordanových bloků v Jordanovu kanonickém tvaru matice **A**, tj. vlastně Jordanův kanonický tvar **A**. Jedna z možností, jak nalézt minimální polynom matice **A** (alespoň pro matice nevelkých řádů) je následující. Víme, že minimální polynom má stejné kořeny jako polynom charakteristický, pouze některé jeho kořeny mohou mít nižší násobnost. Můžeme tedy vyjít z charakteristického polynomu a postupně snižovat násobnosti jednotlivých kořenů a „zkoušet“, zda takto získaný polynom je anulující.

Pro naše účely budeme dále potřebovat znát z minimálního polynomu matice **A** především násobnosti kořenů (tj. budeme potřebovat znát maximální délky Jordanových bloků v Jordanově kanonickém tvaru **A** odpovídajících jednotlivým vlastním číslům **A**). Ještě než vyslovíme definici funkce matice, uveďme následující definici.

6.1.12 Definice. *Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ *a nechť minimální polynom* **A** *má tvar*

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

(1) *Řekneme, že funkce f komplexní proměnné je* ***definována na spektru matice*** **A**, *jsou-li definovány hodnoty*

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

(2) *Řekneme, že dvě funkce f, g definované na spektru matice $\mathbf{A}$ jsou si* ***rovny na spektru*** *matice $\mathbf{A}$ a píšeme*

$$f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = g\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\},$$

jestliže pro $i = 1, 2, \ldots, s$ je

$$f(\lambda_i) = g(\lambda_i), \quad f'(\lambda_i) = g'(\lambda_i), \ldots, \quad f^{(m_i-1)}(\lambda_i) = g^{(m_i-1)}(\lambda_i).$$

6.1.13 Poznámka. Pokud minimální polynom matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má pouze jednonásobné kořeny (rozmyslete si, že tento případ nastane právě když $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná), pak to, že f je definována na spektru $\mathbf{A}$ pouze znamená, že f je definována na množině $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$, tj. jsou definovány funkční hodnoty $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_s)$. Jestliže pro nějaké i je $m_i > 1$, pak už podle výše uvedené definice musí existovat $f'(\lambda_i)$, tj. f musí být definována na nějakém okolí bodu λ_i. Okolím se zde myslí okolí v komplexní rovině $\mathbb{C}$ a derivací f' se rozumí derivace podle komplexní proměnné. Je-li $m_i = 2$, pak požadujeme pouze existenci první derivace f v bodě λ_i. Je-li $m_i > 2$, pak ovšem požadujeme existenci vyšších derivací v λ_i, k čemuž je potřeba předpokládat, že existuje (alespoň) první derivace f na okolí λ_i, tj. f je holomorfní na okolí λ_i. Nejčastější případ, se kterým se můžeme setkávat je ten, že f je holomorfní na nějaké otevřené množině, která obsahuje $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$.

V případě, že minimální polynom matice $\mathbf{A}$ má pouze jednonásobné kořeny, rovnost $f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = g\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ znamená pouze rovnost funkčních hodnot f a g v bodech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. V případě kořenů vyšší násobnosti rovnost $f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = g\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ znamená navíc rovnost některých derivací f a g v příslušných bodech.

Důležité je následující tvrzení.

6.1.14 Věta. *Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, p, q nechť jsou dva polynomy. Potom*

$$p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) \quad \textit{právě když} \quad p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}.$$

DŮKAZ. Buď $\mathbf{J}$ Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ příslušná transformující matice, tj. $\mathbf{T}$ je taková regulární matice, že $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{J}$. Podle tvrzení 6.1.2 je [viz též rovnost (6.6)]

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{T}p(\mathbf{J})\mathbf{T}^{-1}, \qquad q(\mathbf{A}) = \mathbf{T}q(\mathbf{J})\mathbf{T}^{-1}$$

a vidíme, že $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$ právě když $p(\mathbf{J}) = q(\mathbf{J})$. Tvrzení nyní plyne z věty 6.1.4 a definice rovnosti $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ (viz též odstavec 6.1.5). □

Nyní konečně můžeme vyslovit obecnou definici funkce matice.

6.1.15 Definice. *Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nechť funkce f je definována na spektru matice $\mathbf{A}$. Buď dále p nějaký polynom takový, že*

$$f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}.$$

Potom definujeme hodnotu $f(\mathbf{A})$ rovností

$$f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}).$$

6.1.16 Poznámka. Není těžké ukázat, že ke každé funkci f definované na spektru čtvercové matice $\mathbf{A}$ existuje polynom p tak, že $f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$. Konstrukcí takových polynomů se zde nebudeme obecně zabývat (konstrukci těchto polynomů může čtenář nalézt např. v základních učebnicích numerické matematiky v kapitole o interpolaci). K dané funkci f není ovšem podmínkou $f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ polynom p určen jednoznačně, ale takových polynomů existuje nekonečně mnoho (budeme-li ale uvažovat takový polynom nejnižšího stupně, ten už bude určen jednoznačně). Podstatné ale je, že máme-li dva polynomy p, q, pro které je $f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ a $f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$, pak je ovšem také $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ (viz definice rovnosti funkcí na spektru matice) a podle věty 6.1.14 je potom $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$. To znamená, že v definici 6.1.15 nezáleží na volbě polynomu p, pro který je $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$ — hodnota $f(\mathbf{A})$ je rovností $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ určena jednoznačně. Jelikož pro polynom p je samozřejmě vždy $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$, hodnota polynomu v matici podle definice 6.1.15 odpovídá přirozené definici hodnoty polynomu na matici rovností (6.4). To znamená, že na definici 6.1.15 hodnoty funkce v matici se můžeme dívat jako na rozšíření funkcí matic z polynomů na obecnější funkce.

Zkusme si nyní spočítat některé konkrétní příklady funkce matice. Budeme přitom postupovat přesně podle definice 6.1.15.

6.1.17 Příklad. Nalezněte následující hodnoty:

(a) $\mathbf{A}^{50}$, když $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

(b) $\sqrt{\mathbf{A}}$, když $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

(c) $\sqrt{\mathbf{A}}$, když $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,

(d) $\sqrt{\mathbf{A}}$, když $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(e) $\log \mathbf{A}$, když $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Řešení.

(a) Nalezněme nejprve minimální polynom matice $\mathbf{A}$. Charakteristický polynom $\mathbf{A}$ je

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Matice $\mathbf{A}$ má jediné vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ s algebraickou násobností 2. Minimální polynom $\mathbf{A}$ je tedy roven buď $(\lambda - 2)^2$ nebo $(\lambda - 2)$. Jelikož ale

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} \neq \mathbf{0},$$

polynom $(\lambda - 2)$ není anulující polynom, tj. není to ani minimální polynom $\mathbf{A}$. Minimální polynom matice $\mathbf{A}$ je tedy

$$M(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

[přesvědčte se přímo, že $M(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$]. Máme nalézt $\mathbf{A}^{50}$, tj. hodnotu $f(\mathbf{A})$, kde $f(z) = z^{50}$. Nalezněme nyní nějaký polynom p takový, že $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$. Jelikož minimální polynom matice $\mathbf{A}$ má jediný kořen $\lambda_1 = 2$ o násobnosti 2, znamená to, že máme nalézt polynom p, pro který platí

$$(*) \qquad p(2) = f(2) = 2^{50}, \qquad p'(2) = f'(2) = 50 \cdot 2^{49} = 25 \cdot 2^{50}.$$

Hledejme takový polynom prvního stupně, který má obecně tvar

$$p(\lambda) = a\lambda + b$$

(kde a, b jsou zatím neznámé konstanty). Jelikož je $p'(\lambda) = a$, mají podmínky $(*)$ tvar

$$2a + b = 2^{50}, \qquad a = 25 \cdot 2^{50}.$$

Odtud $b = 2^{50} - 2 \cdot 25 \cdot 2^{50} = -49 \cdot 2^{50}$,

$$p(\lambda) = 2^{50}(25\lambda - 49).$$

Nyní již dostáváme

$$\mathbf{A}^{50} = f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = 2^{50}(25\mathbf{A} - 49\mathbf{E}) = 2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}.$$

Pokuste se k tomuto výsledku dojít postupným násobením matice $\mathbf{A}$.

(b) Charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je (spočtěte)

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda = -\lambda(\lambda - 9)^2.$$

Vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, přičemž λ_1 má algebraickou násobnost 1, λ_2 má algebraickou násobnost 2. Jelikož $\mathbf{A}$ je symetrická, je diagonalizovatelná, tj. délky všech Jordanových bloků v Jordanovu kanonickém tvaru jsou rovny 1. To znamená, že minimální polynom $\mathbf{A}$ je

$$M(\lambda) = \lambda(\lambda - 9) = \lambda^2 - 9\lambda;$$

přesvědčte se přímo, že je opravdu $M(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Označme $f(z) = \sqrt{z}$ a nalezněme nějaký polynom p, pro který je $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$, tj.

$$(*) \qquad p(0) = f(0) = 0, \qquad p(9) = f(9) = 3$$

(pokud uvažujeme hlavní hodnotu odmocniny). Opět zde uvažujeme polynom prvního stupně $p(\lambda) = a\lambda + b$. Z $(*)$ dostáváme okamžitě

$$a \cdot 0 + b = 0, \quad \text{tj.} \quad b = 0, \qquad a \cdot 9 + 0 = 3, \quad \text{tj.} \quad a = 1/3, \qquad p(\lambda) = \frac{\lambda}{3}.$$

Odtud již

$$\sqrt{\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poslední matici označme $\mathbf{B}$ a pro zajímavost spočtěme

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 45 & -18 & 36 \\ -18 & 72 & 18 \\ 36 & 18 & 45 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Spočtená matice $\sqrt{\mathbf{A}}$ má tedy tu vlastnost, kterou jsme očekávali, tj. $\sqrt{\mathbf{A}}\cdot\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$.

(c) Charakteristický polynom $\mathbf{A}$ je (spočtěte)

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda-1)^2,$$

vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ s algebraickými násobnostmi po řadě 1 a 2. Na první pohled není vidět, zda $\mathbf{A}$ je či není diagonalizovatelná (na rozdíl od předchozího příkladu), takže není zřejmé, zda minimální polynom $\mathbf{A}$ je roven $\lambda(\lambda-1)$ nebo $\lambda(\lambda-1)^2$. Je ale

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

tj. minimální polynom $\mathbf{A}$ je nutně

$$M(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$$

(mimochodem vidíme, že $\mathbf{A}$ není diagonalizovatelná). Označme opět $f(z) = \sqrt{z}$ (opět uvažujeme hlavní hodnotu odmocniny) a hledejme polynom p takový, že $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$, tj. tentokrát

$$(*) \qquad p(0) = f(0) = 0, \qquad p(1) = f(1) = 1, \qquad p'(1) = f'(1) = 1/2.$$

Zde máme tři podmínky a proto budeme uvažovat polynom druhého stupně

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Podmínky $(*)$ mají potom tvar [neboť $p'(\lambda) = 2a\lambda + b$]

$$a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 0, \qquad a + b + c = 1, \qquad 2a + b = 1/2,$$

odkud snadno spočteme, že $a = -1/2$, $b = 3/2$, $c = 0$, tj. máme

$$p(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda = -\frac{\lambda}{2}(\lambda-3).$$

Nyní již spočteme, že

$$\sqrt{\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Přenecháváme čtenáři, aby ověřil, že je opět $\sqrt{\mathbf{A}} \cdot \sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$.

(d) Spočteme, že charakteristický polynom $\mathbf{A}$ je

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 1);$$

$\lambda_1 = 0$ je dvojnásobné vlastní číslo $\mathbf{A}$, $\lambda_2 = 0$ je jednonásobné. Minimální polynom $\mathbf{A}$ je roven buď $\lambda(\lambda - 1)$ nebo $\lambda^2(\lambda - 1)$. Jelikož

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

minimální polynom $\mathbf{A}$ je

$$M(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1).$$

Je-li nyní $f(z) = \sqrt{z}$, pak ale f není definována na spektru $\mathbf{A}$, neboť f nemá v bodě $z = 0$ derivaci (viz definici 6.1.12). To znamená, že podle definice 6.1.15 v tomto případě hodnota $\sqrt{\mathbf{A}} = f(\mathbf{A})$ není definována.

(e) Charakteristický polynom $\mathbf{A}$ je

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3,$$

$\mathbf{A}$ má jediné (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda_1 = 1$. Minimální polynom $\mathbf{A}$ je roven buď $\lambda - 1$ nebo $(\lambda - 1)^2$ nebo $(\lambda - 1)^3$. Zřejmě je (spočtěte)

$$(\mathbf{A} - E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

takže minimální polynom $\mathbf{A}$ je roven

$$M(\lambda) = (\lambda - 1)^3.$$

Označme $f(z) = \log z$ (připomeňme, že $\log z$ značí hlavní větev logaritmu v komplexní rovině) a nalezněme polynom p takový, že $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$, tj.

$$p(1) = f(1) = 0, \qquad p'(1) = f'(1) = 1, \qquad p''(1) = f''(1) = -1.$$

Je-li $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, pak tyto podmínky mají tvar

$$a + b + c = 0, \qquad 2a + b = 1, \qquad 2a = -1.$$

Odtud $a = -1/2$, $b = 2$, $c = -3/2$, tj.

$$p(\lambda) = \frac{1}{2}(-\lambda^2 + 4\lambda - 3).$$

Nyní již dostáváme

$$\begin{aligned}
\log \mathbf{A} = f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}(-\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \\
&= \frac{1}{2}\left[-\begin{pmatrix} 6 & -2 & -7 \\ -3 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -4 & -16 \\ -8 & 8 & 12 \\ 12 & -4 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -9 \\ -5 & 2 & 7 \\ 7 & -2 & -9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Označme $\mathbf{B} = \log \mathbf{A}$ a pro zajímavost zkusme nalézt $e^{\mathbf{B}}$. Zjistíme, že $p_{\mathbf{B}}(\lambda) = -\lambda^3$ (spočtěte), tj. $\mathbf{B}$ má jediné vlastní číslo rovno 0. Jelikož je $\mathbf{B}^2 \neq \mathbf{0}$ (ověřte), je minimální polynom $\mathbf{B}$ roven λ^3. Označme $g(z) = e^z$ a nalezněme polynom q takový, že $q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{B}}\} = g\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{B}}\}$, tj. takový, že

$$q(0) = g(0) = 1, \qquad q'(0) = g'(0) = 1, \qquad q''(0) = g''(0) = 1.$$

Má-li q tvar $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, dostaneme odtud okamžitě $c = 1$, $b = 1$, $a = 1/2$, tj.

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{B}} = g(\mathbf{B}) = q(\mathbf{B}) &= \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \mathbf{B} + \mathbf{E} = \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -9 \\ -5 & 2 & 7 \\ 7 & -2 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že v tomto případě je $e^{\log \mathbf{A}} = \mathbf{A}$.

6.2 Vlastnosti funkcí matic

Zde se zastavíme alespoň u některých jednoduchých vlastností funkcí matic. Nejprve si všimněme, že rovnost (6.5) z tvrzení 6.1.2 platí nejenom pro polynomy, ale obecně pro funkce matic.

6.2.1 Věta. *Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, f nějaká funkce, která je definovaná na spektru matice $\mathbf{A}$ a nechť $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regulární matice. Potom*

$$f(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{T}. \tag{6.18}$$

DŮKAZ. Především si všimněme, že hodnota $f(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})$ je definována. Podle tvrzení 6.1.7 mají podobné matice stejné anulující polynomy, odkud je okamžitě vidět, že podobné matice mají také stejné minimální polynomy. Jelikož tedy $\mathbf{A}$ a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ mají stejné minimální polynomy, f je definováno na spektru $\mathbf{A}$, je také f definováno na spektru matice $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ (viz definici 6.1.12 pojmu funkce definované na spektru matice). To znamená, že hodnota $f(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})$ je definována.

Buď nyní p nějaký polynom takový, že $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$. Jelikož $\mathbf{A}$ a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ mají stejné minimální polynomy, je ovšem také $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}}\}$ (viz opět definici 6.1.12). Potom je ale (použijeme větu 6.1.2)

$$f(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) = p(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) = \mathbf{T}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{T},$$

tj. platí rovnost (6.18). □

6.2.2 Poznámka. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{J}$ Jordanův kanonický tvar $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ nějaká regulární matice taková, že $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$. Je-li f funkce definovaná na spektru $\mathbf{A}$, pak z rovnosti (6.18) dostáváme

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}f(\mathbf{J})\mathbf{T}^{-1} \tag{6.19}$$

[viz též rovnost (6.6) pro polynomy]. Známe-li Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{A}$ a příslušnou transformující matici, pak hodnotu $f(\mathbf{A})$ můžeme tedy vyjádřit pomocí hodnoty $f(\mathbf{J})$. Podívejme se, jak obecně vypadá hodnota funkce na matici, která je v Jordanově tvaru.

Buď $\mathbf{J}$ matice v Jordanově tvaru,

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\big[\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1), \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2), \dots, \mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big], \tag{6.20}$$

a buď f nějaká funkce definovaná na spektru matice $\mathbf{J}$. Buď dále p nějaký polynom takový, že $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}}\}$. Podle toho, co jsme si rozmysleli v odstavci 6.1.15, vidíme, že

$$f(\mathbf{J}) = p(\mathbf{J}) = \operatorname{diag}\Big[p\big(\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)\big), p\big(\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)\big), \dots, p\big(\mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big)\Big].$$

Vzpomeneme-li si na vztah minimálního polynomu matice a délek Jordanových bloků v jejím Jordanovu kanonickém tvaru (viz poznámku 6.1.11), vidíme okamžitě, že je-li $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}}\}$, pak pro každé $i = 1, 2, \dots, r$ je také $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)}\}$ a tedy

$$p\big(\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)\big) = f\big(\mathbf{J}_{k_i}(\lambda_i)\big).$$

Dohromady tak dostáváme, že má-li $\mathbf{J}$ tvar (6.20) (a f je definována na spektru $\mathbf{J}$), pak

$$f(\mathbf{J}) = \operatorname{diag}\Big[f\big(\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)\big), f\big(\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)\big), \dots, f\big(\mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r)\big)\Big]. \tag{6.21}$$

K nalezení funkce matice v Jordanově tvaru tedy stačí nalézt hodnoty této funkce v jednotlivých Jordanových blocích. Napsat hodnotu funkce v Jodanově bloku je přitom jednoduché.

Uvažujme Jordanův blok $\mathbf{J}_m(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$). Víme, že potom minimální polynom matice $\mathbf{J}_m(\lambda)$ má tvar $M(z) = (z-\lambda)^m$. Buď f nějaká funkce definovaná na spektru matice $\mathbf{J}_m(\lambda)$ (je-li $m = 1$, znamená to pouze, že f je definovaná v bodě λ; je-li $m = 2$, je f definovaná na okolí λ a v λ má první derivaci podle komplexní proměnné; je-li $m > 2$, je f holomorfní na nějakém okolí λ). Buď dále p nějaký polynom, pro který je $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}_m(\lambda)}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{J}_m(\lambda)}\}$, tj.

$$(*) \qquad p(\lambda) = f(\lambda), \quad p'(\lambda) = f'(\lambda), \ldots, \quad p^{(m-1)}(\lambda) = f^{(m-1)}(\lambda).$$

Potom je $f(\mathbf{J}_m(\lambda)) = p(\mathbf{J}_m(\lambda))$. Z rovnosti (6.14) z věty 6.1.4 a $(*)$ ale okamžitě dostáváme, že

$$(6.22) \quad f\big(\mathbf{J}_m(\lambda)\big) = \\ = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(m-2)!}f^{(m-2)}(\lambda) & \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(m-3)!}f^{(m-3)}(\lambda) & \frac{1}{(m-2)!}f^{(m-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(m-4)!}f^{(m-4)}(\lambda) & \frac{1}{(m-3)!}f^{(m-3)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

V této rovnosti již nevystupuje žádný pomocný polynom p. Rovnosti (6.22), (6.21) a (6.19) dávají tedy jinou možnost výpočtu hodnoty funkce matice. Otázkou ovšem je, zda je jednodušší nalezení Jordanova kanonického tvaru matice a příslušné transformující matice (a k ní inverzní) nebo minimálního polynomu a polynomu, který se rovná dané funkci na spektru.

Z rovností (6.19), (6.21) a (6.22) plyne zajímavý vztah mezi vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ a vlastními čísly matice $f(\mathbf{A})$. Přenecháváme čtenáři, aby si rozmyslel, že je-li f definována na spektru $\mathbf{A}$, pak z těchto rovností (a skutečnosti, že podobné matice mají stejný charakteristický polynom) plyne, že jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, pak $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_k)$ jsou všechna vlastní čísla matice $f(\mathbf{A})$ [zkuste si rozmyslet, co se dá říci o algebraických násobnostech vlastních čísel matice $f(\mathbf{A})$].

6.2.3. Všimněme si, že je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, f, g dvě funkce definované na spektru matice $\mathbf{A}$, pak při označení

$$h(z) = f(z)g(z)$$

[pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která je $f(z)$ i $g(z)$ definováno] platí

$$(6.23) \qquad f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

Na toto tvrzení se můžeme dívat jako na zobecnění analogického tvrzení 6.1.1, které bylo vysloveno pro polynomy.

Nejprve si můžeme uvědomit, že jsou-li f, g definovány na spektru matice $\mathbf{A}$, pak také funkce h je definována na spektru $\mathbf{A}$. Je-li totiž $\lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$, f, g mají v λ derivace až do řádu k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), pak jistě také h má v λ derivace až do řádu k (je-li $k > 1$, pak f, g a tedy také h jsou dokonce holomorfní na nějakém okolí bodu λ).

Nechť nyní p, q jsou nějaké polynomy takové, že

$$p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}, \qquad q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = g\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}.$$

Ukažme, že je-li

$$r(z) = p(z)q(z),$$

pak

$$r\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = h\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}.$$

Nechť λ je k-násobný kořen monimálního polynomu matice $\mathbf{A}$. Potom tedy pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$ je

$$p^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda), \qquad q^{(i)}(\lambda) = g^{(i)}(\lambda)$$

a odtud

$$\begin{aligned} r^{(i)}(\lambda) = (pq)^{(i)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} p^{(j)}(\lambda) q^{(i-j)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f^{(i)}(\lambda) g^{(i-j)}(\lambda) = \\ = (fg)^{(i)}(\lambda) = h^{(i)}(\lambda). \end{aligned}$$

To znamená, že je opravdu $r\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = h\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}$. S použitím tvrzení 6.1.1 již dostáváme, že

$$h(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})$$

a zároveň

$$h(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})p(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

6.2.4 Poznámka. Právě dokázané tvrzení z odstavce 6.2.3 má zajímavé důsledky. Zastavme se u některých z nich. Tak třeba v příkladu 6.1.17 (b) [a také (c)] jsme zjistili, že pro danou matici $\mathbf{A}$ je $\sqrt{\mathbf{A}} \cdot \sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Tato rovnost není náhodná, ale platí obecně.

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a nechť f je nějaká jednoznačná větev odmocniny na nějaké množině komplexní roviny taková, že je definována na spektru $\mathbf{A}$ [poznamenejme, že potom 0 nemůže být vícenásobný kořen minimálního polynomu $\mathbf{A}$ — srovnejte s příkladem 6.1.17 (d)]. Potom na definičním oboru f je určitě

$$f(z) \cdot f(z) = z.$$

Z odstavce 6.2.3 dostáváme okamžitě, že $f(\mathbf{A}) \cdot f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, což můžeme psát ve tvaru $\sqrt{\mathbf{A}} \cdot \sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$.

Z tvrzení z odstavce 6.2.3 můžeme dostat zajímavou skutečnost týkající se maticové exponenciely. Je totiž pravda, že pro *libovolnou* čtvercovou matici $\mathbf{A}$ je $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ regulární a platí, že

$$\left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathbf{A}}. \tag{6.24}$$

Označme $f(z) = \mathrm{e}^z$, $g(z) = \mathrm{e}^{-z}$, $h(z) = f(z)g(z) = 1$. Jelikož f, g jsou holomorfní na $\mathbb{C}$, $f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A})$ je definováno pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a pro každou takovouto matici je

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}) \cdot g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) \cdot f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) = \mathbf{E}$$

(využíváme toho, že h je polynom — viz poznámku 6.1.16). Platí opravdu (6.24) a zároveň vidíme, že $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ je vždy matice regulární (regularita $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ je také vidět ze závěru poznámky 6.2.2, neboť vlastní čísla $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ mají podle této poznámky tvar e^{λ_i}, kde λ_i jsou vlastní čísla $\mathbf{A}$, tj. vlastní čísla $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ jsou vždy nenulová).

Přenecháváme čtenáři, aby si analogicky rozmyslel, že je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulární matice, $f(z) = 1/z$, pak je $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$, tj. pro regulární matice můžeme v tomto smyslu psát

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}}.$$

6.2.5 Poznámka. Přenecháváme čtenáři, aby ověřil, že je-li $\mathbf{0}$ nulová čtvercová matice řádu n, pak

$$\mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{E},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n (buď přímo podle definice 6.1.15 nebo podle poznámky 6.2.2). Rovnost $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}} = \mathbf{E}$ se zdá potom být samozřejmá, neboť je $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Upozorněme ale, že „očekávaná“ rovnost $\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}}$ pro matice obecně *neplatí.* Je to vidět třeba z následujícího příkladu (tento příklad je převzat ze skripta E. Krajník: Maticový počet).

Buď

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom např. z rovnosti (6.22) dostáváme okamžitě

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minimální polynom matice $\mathbf{B}$ je $M(z) = z^2$ a polynom p, pro který je $p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{B}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{B}}\}$ [kde $f(z) = \mathrm{e}^z$], je např. (ověřte)

$$p(z) = z + 1,$$

tj.

$$\mathrm{e}^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minimální polynom matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ je $M(z) = p_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(z) = \lambda^2 - 1$ a polynom q, pro který je $q\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\}$, je např. (spočtěte)

$$q(z) = z \cdot \sinh 1 + \cosh 1$$

a tedy

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = q(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}.$$

Dále je

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a vidíme, že

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}}, \qquad \mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}};$$

můžeme si navíc všimnout, že zde je dokonce $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$.

6.2.6. Na závěr se krátce zastavíme u vyjádření funkce matice pomocí mocninné řady. V této souvislosti je třeba definovat součet nekonečné řady matic. Pro naše účely vystačíme s následující jednoduchou definicí „po složkách“. Nechť pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $\mathbf{A}_k \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_k = ({}_k a_{ij})$. Řekneme, že řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k \tag{6.25}$$

konverguje a její součet je roven $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, jestliže pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_k a_{ij}$$

a je

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_k a_{ij} = a_{ij}. \tag{6.26}$$

Píšeme potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}. \tag{6.27}$$

Zvláštní význam mají mocninné řady matic, které jsou analogií mocninných řad v komplexním oboru, tj. řady tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k,$$

kde $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ jsou koeficienty této řady, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je čtvercová matice. V souvislosti s funkcí matice definovanou v předchozím (definice 6.1.15) je důležité následující tvrzení.

6.2.7 Věta. *Buď $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, a nechť f je funkce holomorfní na kruhu*

$$K(\lambda_0; r) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_0| < r\},$$

přičemž na tomto kruhu je

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k.$$

Potom pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ takovou, že

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} \subset K(\lambda_0; r),$$

je

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})^k. \tag{6.28}$$

Toto tvrzení zde uvádíme bez důkazu. Přenecháváme čtenáři, aby si rozmyslel, že v případě, že $\mathbf{A}$ je diagonální matice, je toto tvrzení jednoduché, neboť v případě diagonální matice

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

je jistě (za příslušných předpokladů)

$$f(\mathbf{A}) = \operatorname{diag}\bigl[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)\bigr].$$

Dále přenecháváme čtenáři, aby se pokusil rovnost (6.28) dokázat pro případ, že $\mathbf{A}$ má Jordanův tvar; lze přitom použít rovnosti (6.21), (6.22) a (6.13) [využije se přitom toho, že pro čtvercovou matici $\mathbf{U}$ tvaru (6.10) a řádu m je $\mathbf{U}^k = \mathbf{0}$ pro každé $k \geq m$].

Jelikož $f(z) = \mathrm{e}^z$ je funkce holomorfní na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$ a jelikož pro $z \in \mathbb{C}$ je

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

podle věty 6.2.7 dostáváme okamžitě, že pro *každou* čtvercovou matici $\mathbf{A}$ je

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}. \tag{6.29}$$

Použití této rovnosti pro praktický výpočet hodnoty maticové exponenciely není příliš vhodné, avšak tato rovnost hraje důležitou roli např. v souvislosti se soustavami lineárních diferenciálních rovnic.

6.3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Nakonec se na chvíli vrátíme k homogenním soustavám lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty a ukážeme si alternativní metodu nalezení fundamentálního systému řešení. V této metodě vyjádříme fundamentální systém řešení homogenní soustavy pomocí maticové exponenciely.

6.3.1. Buď $I \subset \mathbb{R}$ otevřený (neprázdný) interval. Připomeňme, že symbolem $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^{m\times n})$, resp. $\mathscr{C}(I;\mathbb{C}^{m\times n})$, jsme značili prostor matic typu $m \times n$, jejichž prvky jsou reálné, resp. komplexní, funkce reálné proměnné, které jsou definované a spojité na intervalu I. Matici $\mathbf{A} \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^{m\times n})$ [resp. $\mathbf{A} \in \mathscr{C}(I;\mathbb{C}^{m\times n})$] chápeme jako zobrazení

$$\mathbf{A}\colon I \to \mathbb{R}^{m\times n} \qquad (\text{resp. } \mathbf{A}\colon I \to \mathbb{C}^{m\times n})$$

a nazýváme ji funkční matice. Jsou-li všechny prvky $\mathbf{A}$ spojité na I, pak říkáme, že funkční matice $\mathbf{A}$ je na I spojitá, tj. spojitost funkční matice definujeme „po složkách“.

Podobně můžeme „po složkách“ definovat derivaci funkční matice. Buď $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^{m\times n})$ [resp. $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathscr{C}(I;\mathbb{C}^{m\times n})$]; zde tedy $a_{ij} = a_{ij}(t)$ jsou reálné (resp. komplexní) funkce reálné proměnné t. Řekneme, že $\mathbf{A}$ má v bodě $t \in I$ derivaci, jestliže pro každé i, j ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) má funkce a_{ij} v bodě t konečnou derivaci. Píšeme potom

$$\mathbf{A}'(t) = \big(a'_{ij}(t)\big) = \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1}(t) & a'_{m2}(t) & \dots & a'_{mn}(t) \end{pmatrix}. \tag{6.30}$$

Poznamenejme, že tato definice derivace funkční matice je zcela analogická definici derivace vektorové funkce — viz odstavec 1.5. Řekneme, že $\mathbf{A}$ je derivovatelná na I, jestliže $\mathbf{A}$ má derivaci v každém bodě $t \in I$. Je-li navíc $\mathbf{A}' \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^{m\times n})$ [resp. $\mathbf{A}' \in \mathscr{C}(I;\mathbb{C}^{m\times n})$], tj. jestliže pro každé i, j je derivace a'_{ij} spojitá na I, pak řekneme, že $\mathbf{A}$ je spojitě derivovatelná na I.

6.3.2. Buď nyní $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a uvažujme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$X' = \mathbf{A}X. \tag{6.31}$$

Nechť vektorové funkce $X_1, X_2, \dots, X_n$ tvoří fundamentální systém řešení této soustavy (na $\mathbb{R}$), tj. $X_1, X_2, \dots, X_n$ je n lineárně nezávislých řešení uvažované soustavy. Uvažujme funkční matici

$$\mathbf{X} = \big(\ X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_n\ \big), \tag{6.32}$$

tj. jednotlivé sloupce matice $\mathbf{X}$ jsou rovny řešením X_i. Je zřejmě $\mathbf{X} \in \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{n\times n})$ [nebo $\mathbf{X} \in \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times n})$ pokud všechna řešení X_i jsou reálná]. Jelikož vektorové funkce X_i jsou spojitě derivovatelné na $\mathbb{R}$, je funkční matice $\mathbf{X}$ spojitě derivovatelná na $\mathbb{R}$, přičemž

$$\mathbf{X}' = \big(\ X'_1 \mid X'_2 \mid \dots \mid X'_n\ \big). \tag{6.33}$$

Jelikož X_i řeší soustavu (6.31), pro $j = 1, 2, \dots, n$ dostáváme, že

$$(\mathbf{X}')_{.j} = X_j' = \mathbf{A}X_j = \mathbf{A}(\mathbf{X})_{.j} = (\mathbf{AX})_{.j}.$$

Platí tedy rovnost

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}. \tag{6.34}$$

V tomto smyslu se na matici $\mathbf{X}$ můžeme dívat jako na *maticové řešení* soustavy (6.31) (na $\mathbb{R}$). Na samotnou rovnost (6.34) se lze dívat jako na diferenciální (maticovou) rovnici, kde neznámá je funkční matice $\mathbf{X}$. Podobným způsobem si můžeme snadno rozmyslet, že matice $\mathbf{X} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n\times n})$ [resp. $\mathbf{X} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$] je řešení rovnice (6.34) právě když každý sloupec matice $\mathbf{X}$ je komplexní (resp. reálné) řešení soustavy (6.31) [přitom tyto sloupce obecně nemusí být lineárně nezávislá řešení, tj. nemusí tvořit fundamentální systém řešení soustavy (6.31)].

Buď stále $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pro $t \in \mathbb{R}$ položme

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} \tag{6.35}$$

[pro pevné $t \in \mathbb{R}$ je $t\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$]. Víme, že $\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ je vždy definováno, tj. $\mathbf{X}(t)$ je definováno pro každé $t \in \mathbb{R}$. Na $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ se můžeme dívat jako na funkční matici na $\mathbb{R}$. Podle (6.29) je přitom

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{A})^k}{k!}. \tag{6.36}$$

Je dobře známo, že součet mocninné řady v komplexním oboru je funkce derivovatelná podle komplexní proměnné (tj. holomorfní funkce) a mocninnou řadu je možné derivovat člen po členu. Např. tedy platí (pro $z \in \mathbb{C}$)

$$(\mathrm{e}^z)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} = \mathrm{e}^z.$$

Dá se ukázat (podrobnosti vynecháváme), že podobně je možné řadu v (6.35) derivovat člen po členu podle reálné proměnné t, tj. funkční matice $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ tvaru (6.35) je derivovatelná (na $\mathbb{R}$). Snadno je přitom vidět, že pro $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, je

$$\left[(t\mathbf{A})^k\right]' = \left[t^k\mathbf{A}^k\right]' = kt^{k-1}\mathbf{A}^k.$$

Pro $k = 0$ je $(t\mathbf{A})^0 = \mathbf{E}$ (kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n) a derivace této matice je nulová čtvercová matice opět řádu n. Derivací řady v (6.35) člen po členu tak dostáváme, že

$$\mathbf{X}'(t) = \left(\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{A})^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!} =$$
$$= \mathbf{A}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{A})^r}{r!} = \mathbf{A}\mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{AX}(t)$$

(rozmyslete si podrobně, jak je to s vytknutím matice $\mathbf{A}$ před nekonečný součet). Vidíme, že funkční matice $\mathbf{X}$ tvaru (6.35) vyhovuje diferenciální maticové rovnici (6.34) [rozmyslete si, že $\mathbf{X}$ tvaru (6.35) je na $\mathbb{R}$ nejenom derivovatelná, ale je tam určitě dokonce spojitě derivovatelná].

V poznámce 6.2.4 jsme zjistili, že hodnota maticové exponenciely je vždy matice regulární. To znamená, že pro každé (pevné) $t \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ regulární. Kromě jiného odtud vidíme, že sloupce matice $\mathbf{X}(t)$ tvaru (6.35) jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy fundamentální systém řešení soustavy (6.31). Nalézt fundamentální systém řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic (6.31) se čtvercovou maticí $\mathbf{A}$ lze tak pomocí maticové exponenciely.

Maticové řešení tvaru (6.35) má následující zajímavou vlastnost. V poznámce 6.2.5 jme si všimli, že je-li $\mathbf{0}$ čtvercová nulová matice řádu n, pak je $\mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice stejného řádu. Má-li $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ tvar (6.35), pak je tedy

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}.$$

Této skutečnosti lze využít při hledání řešení počáteční úlohy pro soustavu (6.31). Buď $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ (počáteční podmínka). Úlohou je nalézt řešení X soustavy (6.31) takové, že $X(0) = \boldsymbol{y}$. Je-li $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, pak stačí položit

$$X(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \boldsymbol{y}. \tag{6.37}$$

Pro $t = 0$ je potom totiž

$$X(0) = \mathbf{X}(0) \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

tj. X tvaru (6.36) vyhovuje dané počáteční podmínce. Zbývá si uvědomit, že X je řešení soustavy (6.31). Je-li $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, pak je ale

$$X = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{X}_{.1} y_1 + \mathbf{X}_{.2} y_2 + \cdots + \mathbf{X}_{.n} y_n,$$

tj. X je lineární kombinace sloupců (funkční) matice $\mathbf{X}$. Jelikož podle předchozího sloupce matice $\mathbf{X}$ jsou řešeními soustavy (6.31), je X také řešením této soustavy.

Poznamenejme ještě, že čtvercové funkční matici $\mathbf{X}$, jejíž sloupce jsou řešení soustavy (6.31) a která má navíc u vlastnost, že $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, se někdy říká *fundamentální matice řešení* této soustavy. Výsledky úvah tohoto odstavce můžeme potom shrnout do stručného tvrzení, že funkční matice $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ [když $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$] je fundamentální matice řešení soustavy $X' = \mathbf{A}X$.

6.3.3 Příklad. Nalezněte fundamentální matici řešení soustavy diferenciálních rovnic $X' = \mathbf{A}X$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejprve spočteme, že

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4$$

(ověřte), tj. $\mathbf{A}$ má jediné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$, které má algebraickou násobnost 4 (přenecháváme čtenáři, aby ověřil, že geometrická násobnost λ_1 je 2). Snadno spočteme, že $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^3$ je rovno nulové matici, ale

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

takže minimální polynom $\mathbf{A}$ je roven

$$M(z) = (z-1)^3.$$

Uvažujme nyní funkci

$$f(z) = \mathrm{e}^{tz}$$

(kde na $t \in \mathbb{R}$ se díváme jako na konstantu) a nalezněme nějaký polynom p, pro který je

$$p\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\} = f\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\}.$$

Máme tedy nalézt takový polynom p, pro který

$$(*) \qquad p(1) = f(1), \qquad p'(1) = f'(1), \qquad p''(1) = f''(1).$$

Stačí uvažovat polynom druhého stupně

$$p(z) = az^2 + bz + c;$$

podmínky $(*)$ mají potom tvar

$$a + b + c = \mathrm{e}^t, \qquad 2a + b = t\mathrm{e}^t, \qquad 2a = t^2\mathrm{e}^t.$$

Odtud okamžitě dostáváme

$$a = \tfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t, \qquad b = \mathrm{e}^t(t - t^2), \qquad c = \mathrm{e}^t(1 - t + \tfrac{1}{2}t^2)$$

a hledaný polynom p má tvar

$$p(z) = \mathrm{e}^t\left[\tfrac{1}{2}t^2z^2 + (t - t^2)z + (1 - t + \tfrac{1}{2}t^2)\right].$$

Nyní již dostáváme, že (spočtěte)

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = \mathrm{e}^t\left[\tfrac{1}{2}t^2\mathbf{A}^2 + (t - t^2)\mathbf{A} + (1 - t + \tfrac{1}{2}t^2)\mathbf{E}\right] =$$

$$= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 & t & \frac{1}{2}t^2 - 4t & 3t \\ -\frac{1}{2}t^2 - t & t + 1 & \frac{1}{2}t^2 - 3t & 3t \\ -\frac{1}{2}t^2 & t & \frac{1}{2} - 4t + 1 & 3t \\ -\frac{1}{2} & t & \frac{1}{2}t^2 - 4t & 3t + 1 \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že je $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$. Přenecháváme čtenáři, aby ověřil, že jednotlivé sloupce matice $\mathbf{X}$ opravdu řeší danou soustavu diferenciálních rovnic.