Téma 22

Ondřej Nývlt nyvlto1@fel.cvut.cz

Náhodná veličina a náhodný vektor. Distribuční funkce, hustota a pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny. Sdružené charakteristiky náhodného vektoru. Korelace a nezávislost náhodných veličin. Základní pravděpodobnostní rozdělení a jejich odhady.

1. Náhodná veličina a náhodný vektor

*jevové pole **S*** – množina všech možných výsledků

*pravděpodobnost náhodných jevů **P*** - míru výskytu jednotlivých výsledků

Náhodná veličina: Nechť S je jevové pole, U∈S je jev jistý a P je pravděpodobnost na jevovém poli S. Reálná funkce X : U → **R**, pro kterou je množina

$$\{E;\ E \subset U,\ X(E) \le x\} \in S$$

pro každou hodnotu x ∈ **R** nazýváme *náhodnou veličinou*.

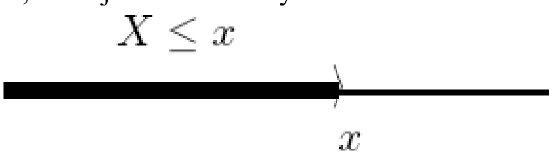
Náhodný vektor: Uspořádanou n−tici $(X_1,X_2, \dots ,X_n)$ náhodných veličin X_i, $1 \le i \le n$, nazýváme náhodným vektorem.

2. Distribuční funkce, hustota a pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny

Distribuční funkce: Je-li X náhodná veličina na pravděpodobnostním poli (U,S,P), pak její *distribuční funkcí* nazýváme reálnou funkci reálné proměnné F : **R** → ⟨0,1⟩, která je definována předpisem

$F(x) = P(X \le x),\ x \in \mathbf{R}$.

Poznámka: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny jsou pravděpodobností náhodných jevů, které jsou znázorněny na obrázku Obr. 5.1.



Obr. 5.1.

Poznámka: Distribuční funkce je definována jako pravděpodobnost výskytu hodnot náhodné veličiny X menších než je zvolená hodnota x.

Vlastnosti distribuční funkce: Pro distribuční funkci F náhodné veličiny X platí:

a) Pro všechny hodnoty x ∈ **R** je $0 \le F(x) \le 1$.
b) Funkce F je neklesající, je spojitá zprava v **R** a $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
c) Pro $x_1 < x_2$ je $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
d) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.
e) $P(X > x) = 1 - F(x)$, $P(X < x) = F(x-)$, $P(X \ge x) = 1 - F(x-)$.
f) Pro $x_1 < x_2$ je

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1-),\ P(x_1 < X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1),$$
$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1-).$$

Hustota náhodné veličiny

Definice: Spojité rozdělení: Říkáme, že náhodná veličina X má *spojité rozdělení*, jestliže existuje funkce *f* taková, že pro distribuční funkci F náhodné veličiny X platí:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\ x\in R$$

Funkci *f* nazýváme *hustotou rozdělení* náhodné veličiny X.

Věta: Vlastnosti hustoty: Reálná funkce f : **R** → **R** je hustotou rozdělení náhodné veličiny X, jestliže platí:

a) $f(x) \geq 0$ pro $x \in$ **R**;
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$
Dále platí:
c) $F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in$ **R**;
d) $Pro\ A\subset R\ je\ P(X\in A)=\int_{A} f(x)\,dx,\ speciálně\ je\ P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

Definice: Nechť pro distribuční funkci F(t) náhodné veličiny X existuje nezáporná reálná funkce f(t) taková, že pro každé $x\in$ **R** platí:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\ x\in R$$

Potom se X nazývá absolutně spojitou náhodnou veličinou a funkce f(t) její **hustotou**.

Věta: Nechť F je distribuční funkce absolutně spojité náhodné veličiny. Ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, je:

$$f(x)=F'(x)=\frac{dF}{dx}(x)$$

Poznámka: Hustota pravděpodobnosti v podstatě udává rychlost růstu F(x) náhodné veličiny.

Poznámka: Hustota pravděpodobnosti je nezáporná a platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

Poznámka: Hustota pravděpodobnosti je určena pro spojité náhodné veličiny. Je definována jako pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny X ve stanoveném intervalu hodnot. Platí:

$$P(x_1\leq x\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=F(x_2)-F(x_1)$$

Pravděpodobnostní funkce

Definice: Diskrétní rozdělení, pravděpodobnostní funkce: Říkáme, že náhodná veličina X má *diskrétní rozdělení*, jestliže nabývá pouze diskrétních hodnot. Funkce *p*, která je definována vztahem

$$p(x) = P(X = x),\ x \in \mathbf{R},$$

se nazývá *pravděpodobnostní funkce*.

Věta: Vlastnosti pravděpodobnostní funkce: Jestliže má náhodná veličina X diskrétní rozdělení a *p* je její pravděpodobnostní funkce, pak platí:

a) Náhodná veličina X nabývá konečně nebo nejvýše spočetně mnoha hodnot. Ty tvoří konečnou nebo nekonečnou posloupnost $M = \{x_i\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$.
b) Je $0 \leq p(x) \leq 1,\ x \in \mathbf{R}$.
c) $p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in M$.
d) $\sum_{x\in M} p(x)=1$
e) Distribuční funkce F je po úsecích konstantní. Body nespojitosti jsou pouze v bodech množiny M a pro $x_i \in M$ je $F(x_i) - F(x_i-) = p(x_i) = P(X = x_i)$.
Pro distribuční funkci platí vztah:

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_i\in M,\ x_i\leq x} p(x_i)$$

3. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny

Střední hodnota

Definice: Střední hodnota: Je-li X náhodná veličina, pak vážený průměr jejíc hodnot podle pravděpodobnosti nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny X a označujeme ji *E(X)*. Potom:

a) pro *spojité rozdělení* s hustotou *f* je $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

b) pro *diskrétní rozdělení* s pravděpodobnostní funkcí *p* je $E(X)=\sum_{x\in R} x\,p(x)$

c) pro smíšené rozdělení s distribuční funkcí F je

$$E(X)=\sum_{x\in X} x\,F(x)-F(x-.)+\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

Věta: Vlastnosti střední hodnoty. Pro střední hodnotu E(X) náhodné veličiny X platí:

a) Je-li $X = a$, pak $E(X) = a$.
b) Je $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$.
c) Je-li $X \geq a > -\infty$, pak $E(X) \geq a$, je-li $X \leq b < \infty$, je $E(X) \leq b$, tedy pro $-\infty < a \leq X \leq b < \infty$ je a $\leq E(X) \leq b$.
Pro náhodné veličiny X a Y je $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
Jsou-li nezávislé, pak i $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Poznámka: Jestliže má náhodná veličina konečnou střední hodnotu, pak jako další číselnou charakteristiku používáme rozptyl či směrodatnou odchylku, pomocí které sledujeme, jak jsou hodnoty rozloženy kolem střední hodnoty.

Rozptyl

Definice: Rozptyl a směrodatná odchylka: Je-li X náhodná veličina se střední hodnotou E(X), pak hodnotu

$$D(X) = E([X - (E(X)]^2)$$

nazýváme *rozptylem náhodné veličiny X*. Hodnotu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

nazýváme její *směrodatnou odchylkou*.

Věta: Vlastnosti rozptylu. Pro rozptyl náhodné veličiny X platí:

a) Je-li $X = a$, pak je $D(X) = 0$.
b) Pro náhodnou veličinu, která není konstantní je $D(X) > 0$.
c) Je $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
d) Je $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 D(X)$.
e) Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, je $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Věta: Vzorec pro výpočet rozptylu. Rozptyl D(X) náhodné veličiny X vypočteme podle vzorce:

a) má-li X *spojité rozdělení s hustotou f*, pak

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx\,,\ E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

b) má-li X *diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí p*, pak

$$D(X)=\sum_{x\in R}(x-E(X))^2 p(x),\ E(X^2)=\sum_{x\in R} x^2 p(x)$$

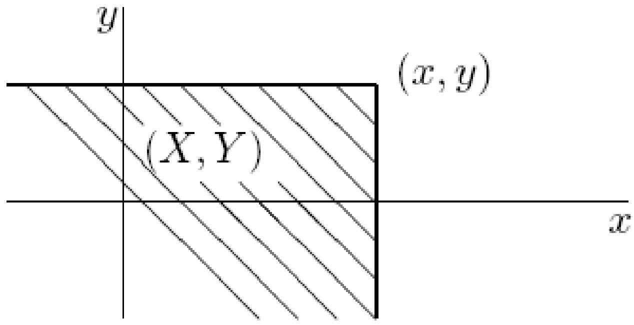
c) pro smíšené rozdělení s distribuční funkcí F – *viz. přednášky*

4. Sdružené charakteristiky náhodného vektoru

Definice: Sdružená distribuční funkce. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak funkci $F = F(x, y)$, která je definovaná předpisem:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),\ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2,$$

nazýváme *sdruženou distribuční funkcí náhodného vektoru (X, Y)*.
Hodnota sdružené distribuční funkce F(x, y) je rovna pravděpodobnosti s jakou se hodnota náhodného vektoru (X, Y) vyskytne ve vyšrafované části roviny z obrázku Obr.10.1.



Obr. 10.1.

Věta: Vlastnosti sdružené distribuční funkce. Pro sdruženou distribuční funkci F(x, y) náhodného vektoru platí:

a) Pro všechny hodnoty $(x, y) \in R^2$ je $F(x, y) \leq (X, Y) \leq 1$.
b) Funkce F(x, y) je neklesající jako funkce proměnné x a proměnné y.
c) Je

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$$

d) Je

$$\lim_{(x, y) \to (\infty, \infty)} F(x, y) = 1$$

e) Je

$$\lim_{y \to \infty} F(x, y) = P(X \leq x), x \in R$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x, y) = P(Y \leq y), y \in R$$

Definice: Sdružená pravděpodobnostní funkce. Jestliže má náhodný vektor (X, Y) diskrétní rozdělení, pak funkci $p = p(x, y)$, která je definována předpisem:

$$p(x, y) = P(X = x \cap Y = y), (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$$

nazýváme *sdruženou pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru (X, Y)*.
Věta: Vlastnosti sdružené pravděpodobnostní funkce. Funkce $p = p(x, y)$ je sdruženou pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru (X, Y) právě když platí:

a) Je $0 \leq p(x, y) \leq 1$ pro všechny hodnoty $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
b) Je $\sum_{(x, y) \in R^2} p(x, y) = 1$
c) Existuje pouze konečná nebo spočetná množina hodnot (x_i, y_k), pro které je $P(x_i, y_k) > 0$.

Definice: Marginální pravděpodobnostní funkce. Je-li $p(x, y)$ sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y), pak jsou marginální pravděpodobnostní funkce $p_1(x)$, resp. $p_2(y)$ náhodné veličiny X, resp Y dány vztahy:

$$p_1(x) = \sum_{y \in R} p(x, y), x \in R, p_2(y) = \sum_{x \in R} p(x, y), y \in R$$

Definice: Spojité rozdělení. Říkáme, že náhodný vektor (X, Y) má spojité rozdělení jestliže pro jeho sdruženou distribuční funkci F(x, y) platí:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du dv, (x, y) \in R^2$$

Funkci $f(x, y)$ nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru (X, Y).

Věta: Vlastnosti sdružené hustoty. Funkce f(x, y) je sdruženou hustotu náhodného vektoru (X, Y) právě když platí:

1. Je $f(x, y) \geq 0$ pro $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

Pro sdruženou hustotu f(x, y) dále platí:

3. $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ pro skoro všechna $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
4. $Pro\ A \subset R^2\ je\ P((X,Y) \in A) = \int \int_A f(x,y)\,dxdy$

5.Korelace a nezávislost náhodných veličin

Definice: Nezávislost náhodných veličin. Říkáme, že jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé, jestliže jsou náhodné jevy (X ≤ x) a (Y ≤ y) nezávislé pro všechny hodnoty x a y z **R**. V opačném případě nazýváme náhodné veličiny *závislými*.

Věta: Podmínka pro nezávislost. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě když platí:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \text{ pro } (x, y) \in R^2,$$

kde F(x, y) je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X, Y) a $F_1(x)$, resp. $F_2(y)$, jsou marginální distribuční funkce náhodné veličiny X, resp. Y.

Věta: Spojitě rozdělené náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě když pro jejich marginální a sdruženou hustotu platí:

$$f(x, y) = f1(x)f2(y),\ (x, y) \in R^2.$$

Věta: Pro náhodné veličiny X a Y platí:
1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak platí: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Definice: Koeficient kovariance. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak koeficientem kovariance náhodných veličin X a Y nazýváme číslo: $C(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

Věta: Vlastnosti kovariance. Pro koeficient kovariance náhodných veličin X a Y platí:

a) C(X,X) = D(X).
b) C(X, Y) = C(Y,X).
c) C(X, Y) = E(XY) − E(X)E(Y).
d) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak C(X, Y) = 0.
e) Je-li C(X, Y) ≠ 0, pak jsou náhodné veličiny X a Y jsou závislé.
f) C(X, aX + b) = aD(X).

Definice: Koeficient korelace. Pro náhodné veličiny X a Y nazýváme koeficientem korelace číslo:

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Poznámka: Koeficient korelace je vlastně mírou lineární závislosti náhodných veličin.

Věta: Vlastnosti koeficientu korelace. Pro koeficient korelace náhodných veličin X a Y platí:

a) ρ(X,X) = 1;
b) ρ(X, Y) = ρ(Y,X);
c) Je-li ρ(X, Y) ≠ 0, pak jsou náhodné veličiny X a Y závislé.
d) Pro nezávislé náhodné veličiny X a Y je ρ(X, Y) = 0.
e) ρ(X, aX + b) = sgna;
f) |ρ(X, Y)| ≤ 1;
g) ρ(X, Y) = ±1 ⇔ Y = aX + b.

6.Základní pravděpodobnostní rozdělení a jejich odhady.

I. Diskrétní rozdělení

1. Rovnoměrné rozdělení.

Náhodná veličina X má diskrétní rovnoměrné rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, \dots, M\}$ s pravděpodobnostmi $P(X = k) = p(k) = 1/M$.
Je pak $E(X) = 0.5\ (M + 1)$

2. Alternativní rozdělení.

Náhodná veličina X má alternativní rozdělení, jestliže nabývá hodnot $\{0, 1\}$ s pravděpodobnostmi $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X) = 1 = p$, $0 < p < 1$.
Je pak $E(X) = p$ a $D(X) = p(1 - p)$.

3. Binomické rozdělení Bi(n, p).

Náhodná veličina X má binomické rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \dots, n\}$

s pravděpodobnostmi $P(X=k)=p(k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad 0 \le k \le n$.

Je pak $E(X) = np$ a $D(X) = np(1 - p)$.

4. Geometrické rozdělení.

Náhodná veličina X má geometrické rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, \dots\}$ s pravděpodobnostmi $P(X = k) = p(k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k \in \mathbf{N}$, $0 < p < 1$.
Je pak $E(X) = 1/p$

5. Poissonovo rozdělení

6. Hypergeometrické rozdělení s parametry (N,M, n).

II. Spojitá rozdělení

1. Rovnoměrné rozdělení v intervalu (a, b).

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení, jestliže nabývá hodnot z intervalu (a, b) tak, že každá hodnota je stejně pravděpodobná. Rovnoměrné rozdělení se velice často zadává pomocí střední hodnoty, t.j. středu $\mu = 0.5\ (a + b)$ intervalu (a, b) a polovinou jeho délky $h = 0.5\ (b-a)$. Rozdělení je pak rovnoměrné v intervalu $(\mu-h, \mu+h)$, $\mu \in R$ a $h > 0$. Hustota náhodné veličiny je tudíž konstantní v intervalu $(a, b) = (\mu - h, \mu + h)$, tedy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \mu - h < x < \mu + h, \\ 0, & x \notin (\mu - h, \mu + h). \end{cases}$$

Je pak $E(X) = 0.5\ (a + b) = \mu$ a $D(X) = (b-a)^2/12 = h^2/3$.
Distribuční funkce F je lineární funkcí v intervalu (a, b) a je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \mu - h, \\ \frac{x-\mu+h}{2h}, & \mu - h < x < \mu + h, \\ 1, & x \ge \mu + h. \end{cases}$$

2. Normální rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$.Náhodná veličina X má normální rozdělení, jestliže má hustotu

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R$$

Hustota je symetrická kolem hodnoty μ a tedy je pak $E(X) = \mu$ a $D(X) = \sigma^2$.
Distribuční funkce F je dána vztahem:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, x \in R$$

a nedá se vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

3. Normované normální rozdělení N(0; 1).

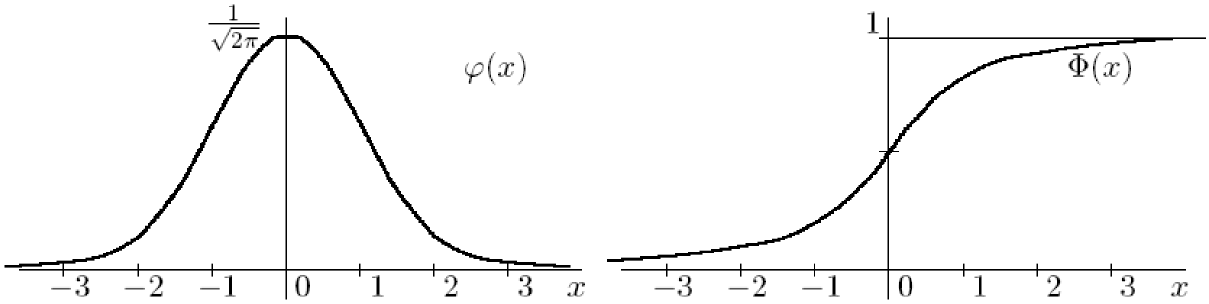
Náhodná veličina U má normální rozdělení s parametry $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, má hustotu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in R$$

a distribuční funkci Φ určenou vztahem

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \in R$$

Pro hustotu a distribuční funkci platí:
$\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.



4.Exponenciální rozdělení Exp(A; δ), δ> 0.

5.Cauchyovo rozdělení

6.Laplaceovo rozdělení

Literatura:

1. slidy k předmětu X01M3C http://math.feld.cvut.cz/prucha/m3p/m3p.html
2. V.Rogalewicz: Pravděpodobnost a statistika pro inženýry