

Téma 26

Jan Bednář bednaj1@fel.cvut.cz

1 Nejistoty měření

standardní nejistoty je standardní směrodatná odchylka veličina, pro níž je nejistota udávána, označuje se symbolem $u(x)$ (z anglického *uncertainty*), skládá se ze dvou složek, x je měřená veličina

- standardní nejistota typu A** vyhodnocovány ze **statistického rozložení výsledků měření** a mohou být charakterizovány experimentální standardní odchylkou (náhodné chyby), stanoveny z výsledků **opakovaných měření** statistickou analýzou série měření, **příčiny jsou neznámé**, s rostoucím počtem měření jejich hodnota klesá
- standardní nejistota typu B** vyhodnocovány z **předpokládaného pravděpodobnostního rozložení** (Gaussovo-normální, trojúhelníkové, rovnoměrné, ...), (systematické chyby), získávají jinak než statistickým zpracováním výsledků opakovaných měření, vyhodnoceny pro jednotlivé zdroje nejistoty
- kombinovaná standardní nejistota typu C** získá se sloučením standard nejistot typu A a B

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \quad (1)$$

rozšířená nejistota označována jako $U(x)$, definována jako součin kombinované standard. nejistoty u_c a koeficientu rozšíření k_r , nutno vždy uvést hodnotu. Pro $k_r=1$ je pravděpodobnost, že výsledek leží v intervalu je 68%, $k_r=2$ je interval 95% a $k_r=3$ je interval 99,5%

výpočet ručkové přístroje dle vztahu 1a, kde TP je třída přesnosti přístroje, M je měřicí rozsah, pro **číslicové přístroje** platí vřah 1b, kde δ_1 je chyba odečtené hodnoty a δ_2 chyba rozsahu, N je počet kvantizačních kroků, R rozlišení přístroje

$$u_B(x) = \frac{TP}{100 \cdot \sqrt{3}} M \quad u_B(x) = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M}{\sqrt{3}} \approx \frac{\frac{\delta_1}{100} X + NR}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

nejistoty nepřímých měření měřená veličina je výpočítána z naměřených hodnot dle známé funkční závislosti, výpočet pomocí parciálních derivací, dle

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2} \quad (3)$$

2 Elektromechanické přístroje

Měřená veličina (např. U, I, P, \dots) působí na pohyblivou část přístroje silou nebo kroutícím momentem, závislým na X dle známé funkční závislosti. Výchylka pohyblivé části je indikována změnou polohy ukazatele nad stupnicí přístroje. Moment vyvozený měřenou veličinou X je **pohybový moment** M_p , vyvažován **direktivním momentem** M_d , uplatňuje se **brzdící moment** M_b a **moment setrvačných sil** M_j , dle d'Allambertova principu platí, že suma momentů je nulová, pak získáme pohybovou rovnici

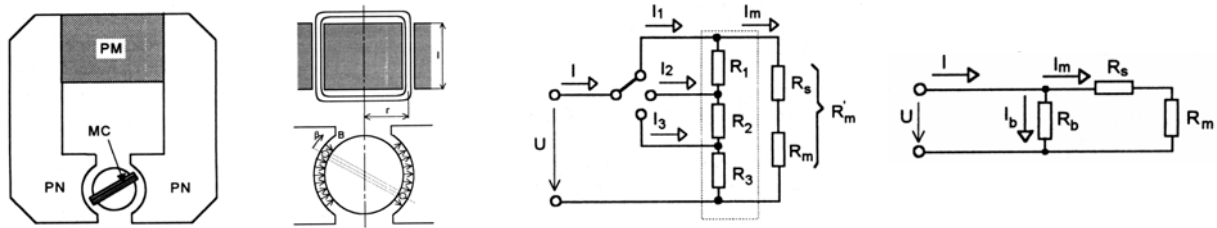
$$J \frac{d^2 \beta}{dt^2} + k_b \frac{d\beta}{dt} + k_d \beta = k_p X \quad (4)$$

2.1 Magnetoelektrické ústrojí

Ve válcové vzduchové mezeře mezi pólovými nástavci PN permanentního magnetu PM je souose uložen umístěn válec z magneticky měkkého materiálu. Měřicí cívka MC, kterou protéká měřený proud se otáčí v radiálním poli ve vzduchové mezeře konstantní šířky mezi pólovými nástavci a feromagnetickým válcem. Cívka je navinuta na hliníkový rámeček, proud se přivádí spirálovými pružinami (ty vyvozují direktivní moment). Pro cívku s N závitů, délkou závitů v radiálním mag. poli v mezeře l a indukci magnetického pole v mezeře B s proudem cívku I platí

$$M_p = 2 \cdot r \cdot N(B \cdot I \cdot l) = k_p \cdot I, \quad (5)$$

tlumení je vyvoláno proudy indukovanými pohybem cívky v jejím vinutí, vyvolaný moment působí proti příčině těchto proudů \Rightarrow proti pohybu cívky (Lenzovo pravidlo).



Obrázek 1. (a, b) magnetoelektrický princip, radiální magnetické pole; (c) Ayrtonův bočník; (d) zapojení voltmetru

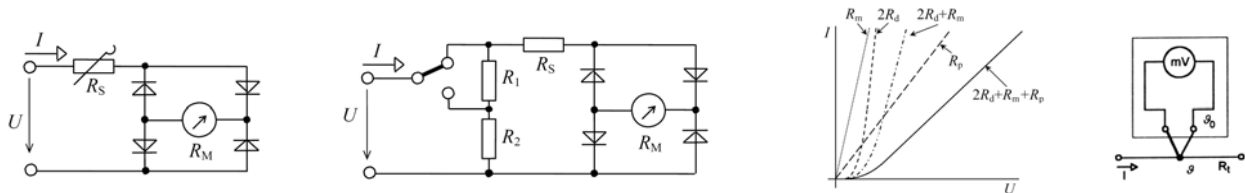
ss ampérmetry z principu, pro vícerozahový lze použít **Ayrtonův bočník**, požadován nulový vstupní odpor

ss voltmetry nutné doplnit předřadný odpor, požadován nekonečný vstupní odpor, obr.1d

střídavé přístroje přístroj je nutné doplnit o usměrňovač – obvod využívající diod k získání **jednocestně** (přerušeni proudu obvodem) nebo **dvoucestně** (nepřerušen proud) usměrněného průběhu, pro dvocestné platí

$$I_{SA} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt, \quad (6.)$$

jedná se o **střední aritmetickou hodnotu**, nutné však linearizovat charakteristiku diod předřadným odporem. Přístroj tedy **měří stejnosměrnou složku** a stupnice bývá lineární. **Měření efektivní hodnoty pouze pro harmonické průběhy**, kdy je stupnice cejchována s použitím **činitele tvaru** $K_T = 1,11$. Pokud nebude harmonický průběh, podělíme hodnotu činitelem tvaru a získáme aritmetickou střední hodnotu.



Obrázek 2. (a,b) V-metr, A-metr s usměrňovačem; (c) linearizace V-A char. diod; (d) přístroj s termočlánekem

přístroje s termočlánekem pro měření efektivní hodnoty nezávisle na časovém průběhu, využívá termoměnič (termočlánek s topným vodičem) k převodu střídavého proudu na stejnosměrné napětí. Střídavý proud ohřívá teplý konec a vzniká termoelektrické napětí měřené termočlánekem.

2.2 Elektromagnetické ústrojí

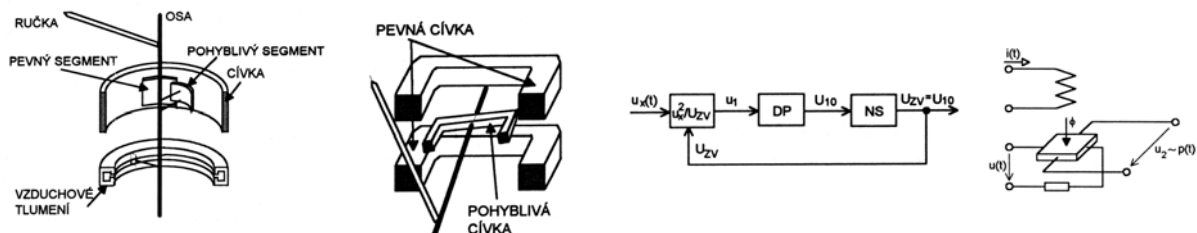
Využívá působení magnetického pole cívky protékající měřeným proudem na feromagnetické tělísko. Jeden pevný a druhý pohyblivý segment spojen s ručkou, cívka magnetuje oba segmenty souhlasně (odpužují se) \Rightarrow vyvíjejí pohybový moment, direktivní moment dán pružinami, tlumení je vzduchové, pro pohybový moment platí

$$M_p = F \cdot r \approx B^2 \cdot r \approx k_p \cdot I^2. \quad (7.)$$

Měří efektivní hodnotu, stupnice je nelineární (odmocňuje), použití přístroje omezuje frekvenční pásmo dané vířivými proudy v konstrukci přístroje.

ampérmetry pro změnu rozsahu se používají odbočky z vinutí, **nelze použít bočník** \Rightarrow jiná frekvenční závislost pro každý odpor, jsou citlivé na vnější rušivá magnetická pole

voltmetry pro změnu rozsahu se používá sériový R_s , zároveň zmenšuje teplotní a frekvenční závislost



Obrázek 3. (a) elektromagnetický princip; (b) elektrodynamický princip; (c) převodník TRUE RMS; (d) násobička

2.3 Elektrodynamické ústrojí

Užívají sil působících mezi pevnou a pohyblivou cívku, které jsou protékány proudem. Cívka je vzduchová. Direktivní moment vyvozen spirálovými pružinami přivádějící proud k otočné cívce, tlumení je vzduchové.

Pohybový moment je úměrný proudu otočné cívky I_2 , konstanta úměrnosti je úměrná magnetické indukci B v mezeře pevné cívky, tedy I_1 , dle

$$M_p = k_p \cdot I_1 \cdot I_2 \quad (8.)$$

wattmetry pevná cívka je proudová (zapojená v sérii s impedancí Z), otočná napěťová (paralelně k Z), dle

$$M_p = \frac{1}{T} k_p \int_0^T i_1 \cdot i_2 dt = \frac{k_p}{T} \int_0^T i_{PC} \frac{u_{NC}}{R_{NC}} dt = k_p \frac{P}{R_{NC}} \quad (9.)$$

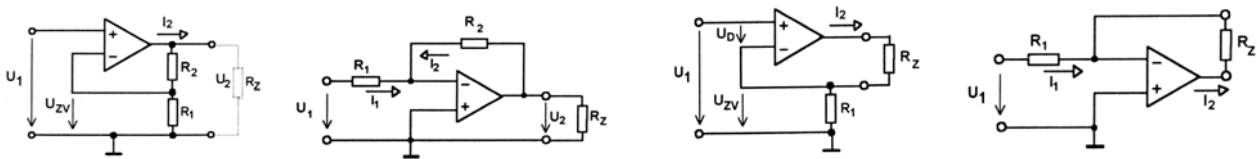
Stupnice přístrojů je lineární, výsledný výkon dán $P = k_W \alpha$, kde k_W je konstanta wattmetru vypočítat ji lze dle

$$k_W = \frac{U_n \cdot I_n \cdot (\cos \varphi)_n}{\alpha_{max}} \quad (10.)$$

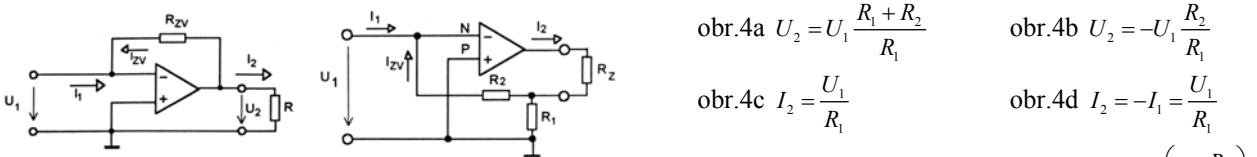
kde U_n a I_n je jmen. napěťový a proudový rozsah, $(\cos \varphi)_n$ jmenovitá hodnota účinníku a α_{max} max. výchylka.

3 Měřicí převodníky elektrických veličin pro měření napětí a proudu

převodník TRUE RMS blok NS je napěťový sledovač, první blok násobička realizující uvedený výraz



Obrázek 4. (a) neinvertující U/U s OZ; (b) invertující U/U s OZ; (c) neinvertující U/I s OZ; (d) invertující U/I s OZ



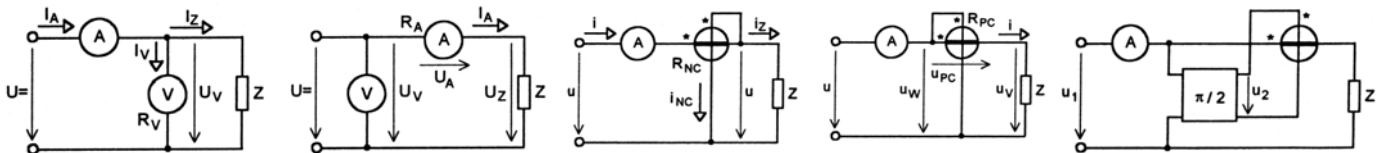
Obrázek 5. (a) invertující I/U s OZ; (b) invertující I/I s OZ; obr.4a $U_2 = U_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1}$; obr.4b $U_2 = -U_1 \frac{R_2}{R_1}$; obr.4c $I_2 = \frac{U_1}{R_1}$; obr.4d $I_2 = -I_1 = \frac{U_1}{R_1}$; obr.5a $U_2 = -I_1 R_{zv}$; obr.5b $I_2 = -I_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

4 Měření výkonu a práce elektrického proudu

Okamžitá hodnota výkonu elektrického proudu $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ a střední hodnota výkonu za periodu (činný výkon) P , výkon spotřebovaný v zátěži považujeme za kladný, pak

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \quad (11.)$$

stejnoseměrný proud zapojení dle (a) používáme pokud známe odpor voltmetru – častější, (b) pokud neznáme odpor voltmetru, nebo nepotřebujeme korigovat výsledek (odpor amérmetru je zanedbatelný)

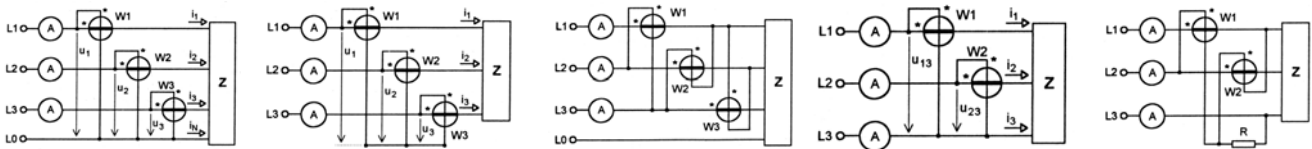


Obrázek 6. (a,b) výkon stejnosměrného proudu; (c,d) činný výkon stříd. jednofázového proudu; (e) jalový výkon;

střídavý jednofázový proud význam zapojení je obdobný jako předešlé, ampérmetr je vhodné použít pro kontrolu proudového rozsahu wattmetru, pokud chceme měřit jalový výkon, musíme zpozdít napětí o 90°

střídavý trojfázový proud využívá se Blondelův teorém – pro měření celkového činného výkonu v n -vodičové soustavě je potřeba minimálně $n-1$ wattmetrů, měření je správné i pro neharmonické průběhy, užití Aronova zapojení, platí

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \Rightarrow i_3 = -(i_1 + i_2), \quad (12.)$$



Obrázek 7. (a) čtyřvodičová síť; (b) třívodičová síť; (c) jalový výkon; (d) Aronovo zapojení; (e) jalový výkon;

5 Měření frekvence a času

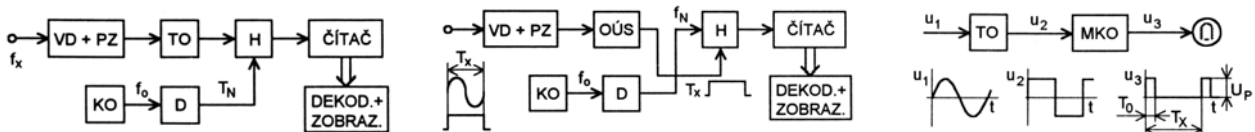
analogový kmitoměr obr.8c vstupní signál je v tvarovacím obvodu TO uřazen na obdélníkový průběh, v monostabilním klopném obvodu MKO se vygeneruje obdélníkový puls délky T_0 , amplitudy U_p , pro stejnosměrnou hodnotu platí

$$U_0 = \frac{1}{T_x} \int_{t=0}^{T_x} u_3 dt = \frac{1}{T_x} \int U_p dt = U_p \cdot T_0 \cdot f_x = k \cdot f_x. \quad (13.)$$

přímé měření frekvence obr.8a, vstupní signál upraven ve vstupním děliči a předzesilovači (VD + PZ), tvarován na pulsy definovanou úroveň v tvarovacím obvodu TO, pulsy jsou čítány po dobu otevření hradla H čítačem, platí

$$f_x = \frac{N}{T_0}. \quad (14.)$$

Nevhodné pro malé frekvence, kde je malý počet pulsů f_x napočítaných v hradle (pro vyšší přesnost by bylo třeba čítat dlouho \Rightarrow dlouhé otevření hradla). Při nevhodně nastavené komparační úrovni v TO může dojít ke zkeslení výsledku (časté přepínání – proto je vhodné nejprve osciloskopem zjistit přibližnou a pak čítačem přesnou hodnotu frekvence)



Obrázek 8. (a) měření frekvence; (b) měř. časového inervalu; (c) analogový kmitoměr

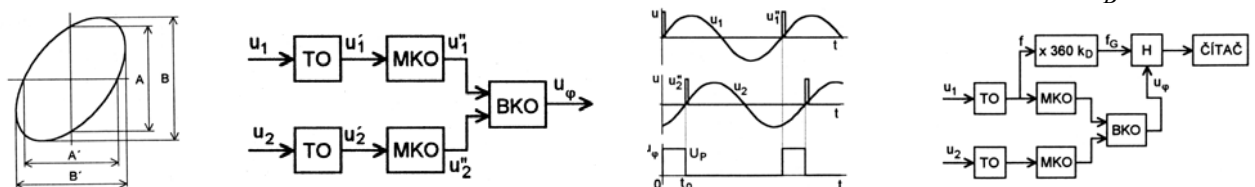
měření doby periody obr.8b, v obvodu úpravy signálu OÚS se převede měřený časový interval na délku pulsu, který otevírá hradlo H, po dobu otevření jsou čítány pulsy definované frekvence f_N dle

$$T_x = \frac{N}{f_N}. \quad (15.)$$

Nevhodné pro vysoké frekvence, kde doba otevření hradla je krátká. Problémy působí šum superponovaný na měřený signál. Chybu lze potlačit průměrováním z více period.

6 Měření fázového rozdílu

osciloskop obr.9a, v režimu X-Y, naměříme hodnoty A a B, pak fázový rozdíl je dle $\varphi = \arcsin \frac{A}{B}$.



Obrázek 9. (a) osciloskop X-Y; (b) elektronický fázoměr; (c) průběhy; (d) číslicový fázoměr

elektronický fázoměr obr.9b, vstupní signály se tvarují v tvarovacích obvodech TO na obdélníkové průběhy, náběžná hrana spouští MKO generující úzké pulsy v bistabilním klopném obvodu BKO pak tyto pulsy generují obdélník s dobou trvání t_0 a periodou T , stejnosměrná složka je úměrná měřenému fázovému rozdílu dle

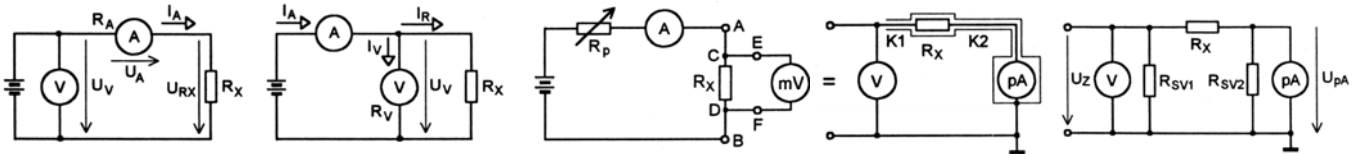
$$U_{0,\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T u_\varphi(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_0} U_p dt = U_p \frac{t_0}{T} = U_p \frac{\varphi}{2\pi} = c \cdot \varphi. \quad (16.)$$

Pro číslicové zpracování dle obr. platí $N = t_0 \cdot f_g = t_0 \cdot k_n \cdot f = 360k_d \frac{t_0}{T} = k_d \cdot \varphi$. (17.)

Chyby způsobují dynamické vlastnosti komparátorů v tvarovacích obvodech.

7 Měření odporů

Rozlišujeme **malé odpory** velikost odporu přívodů a přechodových odporů je srovnatelná s nejistotou měření, nutné použít čtyřsvorkové připojení měřeného odporu; **velké odpory** poměr velikosti parazitních svodových proudů a proudů protékajícího měřeným odporem je srovnatelný s relativní nejistotou měření.



Obrázek 10. (a,b) Ohmova metoda; (c) čtyřsvorkové připojení pro malé odpory; (d,e) velké odpory

malé odpory obr.10 používá se **čtyřsvorkové zapojení pro potlačení přechodových odporů**, úbytek napětí na proudových svorkách A B není měřen připojeným milivoltmetrem, měřený odpor je definován mezi svorkami C D, svorky E F jsou v sérii s milivoltmetrem a přechodový odpor vůči vstupnímu odporu lze zanedbat. **Termoelektrická napětí potlačíme komutací proudu**, úbytkem napětí na odporu vzniká teplo, polarita termoel. napětí je stejná, proto se odečtou dle

$$U_{mV1} = I \cdot R_X + U_{t1} - U_{t2}, U_{mV2} = -I \cdot R_X + U_{t1} - U_{t2}, \text{ pak } U_X = \frac{U_{mV1} - U_{mV2}}{2} = I \cdot R_X \quad (18.)$$

střední odpory používá se **Ohmova metoda**, nejjednodušší metoda, podle obr.10, zapojení dle (a) používáme v případě že $R_A \ll R_X$, zapojení dle (b) pak pro $R_A \gg R_X$.

velké odpory vyskytují se malé měřené proudy, nutno zemnit, aby se neuplatnil svodový odpor podložky, dle obr. se R_{SV1} se neuplatní (paralelně ke zdroji napětí), R_{SV2} se neuplatní pokud nebude úbytek napětí na ampérmetru, pokud bude, nutno korigovat dle

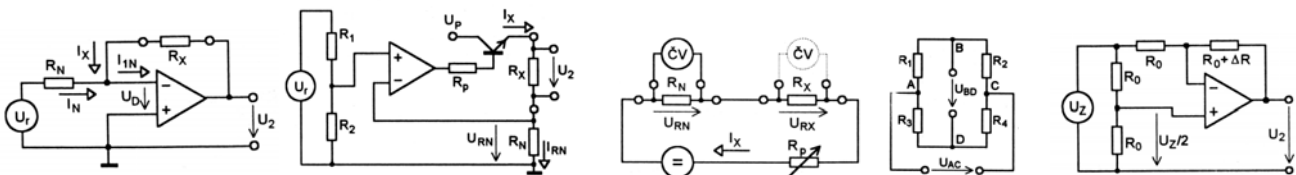
$$R_X = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_Z - U_{pA}}{I_{pA} + I_{SV}} \approx \frac{U_Z}{I_{pA}} \left(1 - \frac{U_{pA}}{U_Z} - \frac{I_{SV}}{I_{pA}} \right) \quad (19.)$$

převodník R/U pro číslicové multimetry, pro střední a velké odpory (neumožňuje připojit čtyřsvorkově), pro ideální OZ v zapojení dle obr. platí

$$R_X = -R_N \frac{U_2}{U_r} \quad (20.)$$

sériová srovnávací metoda metoda pro přesná měření malých odporů, nutný je odporový etalon řádově stejný s měřeným se kterým srovnáváme, použít stejný voltmetr se stejným rozsahem (uplatní se jen chyba linearity), platí

$$R_X = R_N \frac{U_{RX}}{U_{RN}} \quad (21.)$$



Obrázek 11. (a,b) převodník R/U; (c) sériová srovnávací metoda; (d,e) Wheatstoneův můstek

Wheatstoneův můstek vyvážený můstek se používá po velmi přesná měření středních odporů, můstek je napájen mezi body A C, výstup je D B, pak výstup je

$$U_{BD} = U_{AC} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right). \quad (22.)$$

Pro **vyvážený můstek** je U_{BD} nulové, platí $R_1 R_4 = R_2 R_3$. Měřený odpor zapojíme jako R_1 a vyvažujeme dekádou místo R_2 . V nevyváženém můstku nahradíme odpory hodnotou R_0 a pak při změně o ΔR platí pro U_{BD} při napěťovém zdroji

$$U_{BD} = U_{AC} \left(\frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R} - \frac{R_0}{2R_0} \right) \Rightarrow U_{BD} = \frac{U_{AC}}{4R_0} \frac{\Delta R}{1 + \frac{\Delta R}{2R_0}} \approx \frac{U_{AC}}{4R_0} \Delta R. \quad (23.)$$

Pokud je $\Delta R \ll 2R_0$ ($\Delta R \ll 4R_0$ proudové), pak lze nelinearitu zanedbat a linearizovat. Pro proudové napájení pak odvodíme

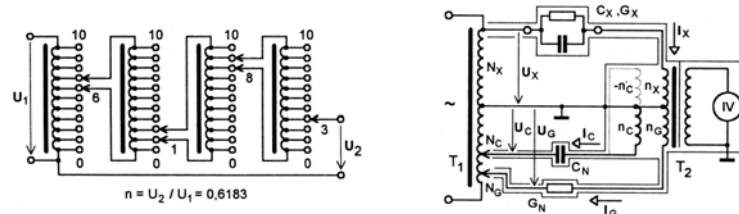
$$U_{AC} = I_Z \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = I_Z \frac{2R_0 + \Delta R}{2} \Rightarrow U_{BD} = \frac{I_Z}{4} \frac{\Delta R}{1 + \frac{\Delta R}{4R_0}} \approx \frac{I_Z}{4} \Delta R. \quad (24.)$$

Pro větší změny odporu je nutné použít linearizované zapojení dle obr.1 le pak platí

$$\frac{U_{Z/2}}{R_0} = -\frac{U_2 - U_{Z/2}}{R_0 + \Delta R} \Rightarrow U_2 = -U_Z \frac{\Delta R}{2R_0}. \quad (25.)$$

8 Měření impedancí

Kelvin – Varleyovů indukční dekadický dělič pro vyvažování fázově citlivých detektorů v řízeném usměrňovači,



Obrázek 12. (a) indukční dělič; (b) transformátorový můstek

transformátorové můstky snažíme se nastavit proměnnou impedancí tak, aby **indikátorem vyvážení** neprotékal proud, na obr. je diferenční transformátor T_2 a indukční dělič T_1 , ten umožňuje vyvažovat obě složky Y , platí podmínka vyváženosti

$$n_X I_X = n_C I_C + n_G I_G, \quad (26.)$$

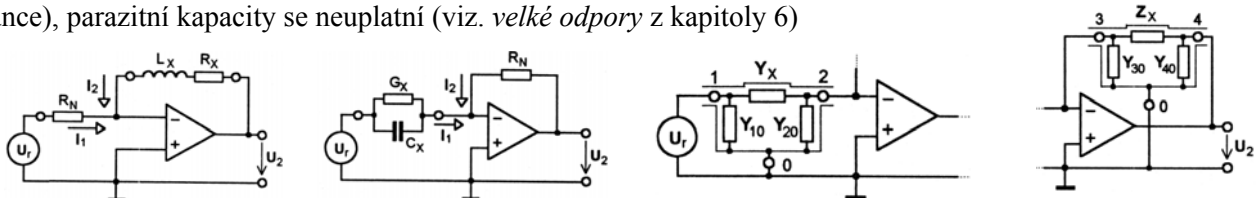
pak po dosazení dle obr. dostaneme

$$n_X U_X (G_X + j\omega C_X) = n_G U_G G_N + n_C U_C j\omega C_N. \quad (27.)$$

Pokud uvažujeme poměr napětí k počtu závitů následovně $U_X/U_C = N_X/N_C$ a $U_X/U_G = N_X/N_G$, pak po úpravách platí

$$C_X = \frac{N_C}{N_X} \frac{n_C}{n_X} C_N \quad \text{a} \quad G_X = \frac{N_G}{N_X} \frac{n_G}{n_X} G_N \quad (28.)$$

převodník impedance/fázor napětí zapojení dle obr. (a) lze použít pro měření prvků **sériového náhradního schématu cívky**, jedná se o invertující zesilovač, zapojení (b) pak pro měření parametrů **paralelního náhradního schématu kondenzátoru**, v obou zapojeních lze použít třísvorkové připojení měřené impedance (admittance), parazitní kapacity se neuplatní (viz. *velké odpory* z kapitoly 6)



Obrázek 13. (a) převodník Z/U , Y/U ; (b) stínění měřené impedance

- | | | |
|----------------------------|--|-----------------|
| [1.] Haasz V., Sedláček M. | Elektrická měření – Přístroje a metody | ČVUT Praha 2003 |
| [2.] Dufek M., Fajt V. | Elektrická měření I, II | ČVUT Praha 1972 |
| [3.] Muilínovský F. | Elektrické měřicí metody | TVV Praha 1951 |
| [4.] Kašpar P., kolektiv | Přednášky a cvičení z X38EMC | Praha 2004 |