Dynamické systémy (spojité-diskrétní, lineární-nelineární) a jejich modely (dif. rovnice, přenos, stavový popis). Tvorba a převody modelů. Linearizace a disktretizace. Simulace. Analogie mezi systémy různé fyzikální podstaty. Identifikace a verifikace. Laplaceova a z- transformace: základní vlastnosti, výpočet obrazu a vzoru.

Dynamické systémy

Množiny popisující dynamický systém :

a) časových okamžiků T,
b) stavů systému X,
c) okamžitých hodnot vstupních veličin U,
d) přípustných vstupních funkcí (signálů) $U = \{u(t) : T \to U\}$,
e) okamžitých hodnot výstupních veličin Y ,
f) přípustných výstupních funkcí (signálů) $Y = \{y(t) : T \to Y\}$.

Vlastnosti dyn. sys :

a) ryzost (striktně ryzí) : je-li výstupní zobrazení nezávislé explicitně na řízení, pak

$$y(t) = g(x(t), t)$$

kde : g(t) je výstupní fce

x(t) je hodnota vnitřních stavů

b) Systém S je spojitý, je-li množina T množinou reálných čísel. Systém S je diskrétní, je-li množina T množinou celých čísel. (Spojitý systém odpovídá intuitivní představě dynamického systému. Diskrétní systém je tedy systém s diskrétním časem, může vzniknout tak, že všechny veličiny spojitého systému měříme v diskrétních časových okamžicích.)

c) Systém S je stacionární :

1. množina času T je aditivní grupa (množina, na které je definováno sčítání prvků),
2. množina přípustných vstupních funkcí U je uzavřena vůči operátoru posunutí v čase z^v : $u \to \bar{u}$, který je určen vztahem $\bar{u}(t) = u(t+v) = z^v(u(t))$, pro všechna v, t $\in$T
3. platí : $\varphi(t, \tau, x, u) = \varphi(t+v, \tau+v, x, z^v(u))$

(Stacionárnímu systému se vlastnosti nemění v čase. Stacionarita systému je důležitá vlastnost systému, nebot' všechny vlastnosti stacionárního systému jsou časově invariantní =

t-invariantní nebo časově invariantní.)

d) Systém S se je lineární :

1. množiny X, U, *U*, Y, *Y* jsou vektorové prostory
2. zobrazení φ(t, τ , ., .) : X × *U* -> X, je lineární pro všechna t, τ
3. zobrazení g(., ., t) : X × U -> Y je lineární pro všechna t.

U lineárního systému je přechodová funkce stavu φ lineární vzhledem k počátečímu stavu a řízení s výstupní funkce g je také lineární vzhledem k okamžité hodnotě stavu a řízení.

Popis :

1. Stavové rovnice ve spojitém čase

- Stavová rovnice nelineárního spojitého systému

$$\dot{\vec{x}}(t)=f(\vec{x},\vec{u},t)$$
$$\vec{y}(t)=g(\vec{x},\vec{u},t)$$

- Stavová rovnice lineárního spojitého systému

$$\dot{\vec{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)*\vec{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)*\vec{u}(t)$$
$$\vec{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)*\vec{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)*\vec{u}(t)$$

A(*t*) je matice systému rozměru (*n x n*),

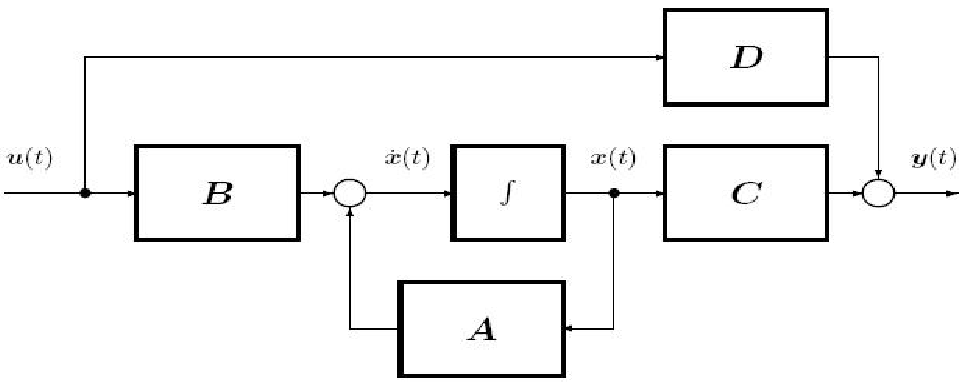
B(*t*) je matice řízení rozměru (*n x r*),

C(*t*) a *D*(*t*) jsou výstupní matice rozmìru (*m x n*) a (*m x r*).

Lineární systém - $(A(t);B(t);C(t);D(t))_n$.

Lineární stacionární systém - $(A;B;C;D)_n$.

Ryze dynamický systém (striktně ryzí systém) - *D* = 0.



Blokové schéma spojitého lineárního dynamického systému

2. Stavové rovnice v diskrétním čase

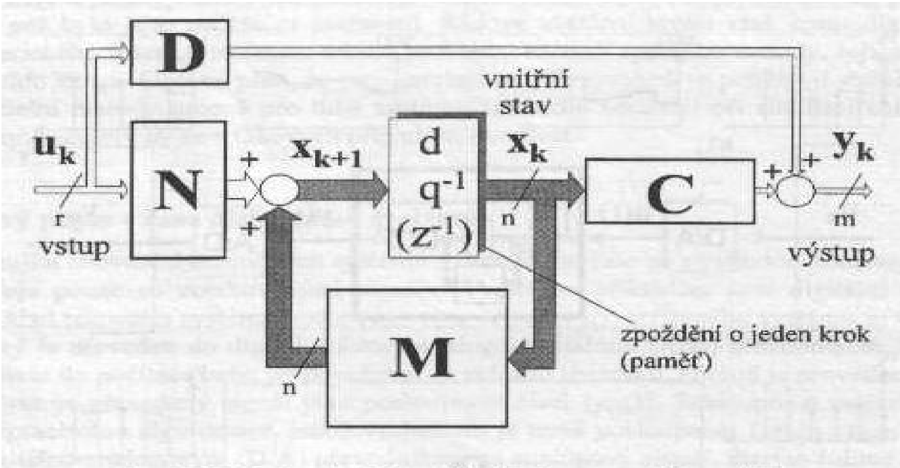
- Stavová rovnice nelineárního spojitého systému

$$\vec{x}(t_{k+1}) = f_d(\vec{x}_k, \vec{u}_k, t_k)$$
$$\vec{y}(t_k) = g(\vec{x}_k, \vec{u}_k, t_k)$$

$t_k = k * T_s$, k= ....,0,1,2,3......

- Stavová rovnice lineárního spojitého systému

$$\vec{x}((k+1)*T_s) = \boldsymbol{M}*\vec{x}(k*T_s) + N*\vec{u}(k*T_s)$$
$$\vec{y}(k*T_s) = \boldsymbol{C}*\vec{x}(k*T_s) + \boldsymbol{D}*\vec{u}(k*T_s)$$

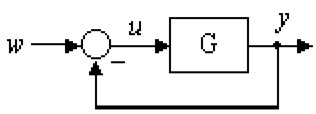


Obr. 12.6 Blokové schéma diskrétního stavového modelu

3. Přenos

- $G(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$, přenos systému bez zpětné vazby (s=jω)

- $F(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{W(j\omega)} = \dfrac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$, přenos se zápornou zpětnou vazbou (s=jω)



$$G(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{U(i\omega)}$$

$$F(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{W(i\omega)} = \frac{G(i\omega)}{1+G(i\omega)}$$

- souvislost mezi přenosem a dif. rovnicemi :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$G(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad , \quad K = \frac{b_m}{a_n}$$

z_i – nuly přenosu, p_i – póly přenosu

- souvislost mezi přenosem a stavového popisu ve spojitém čase :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

- souvislost mezi přenosem a stavového popisu v diskrétním čase :

$$H(z)=C(zI-M)^{-1}N+D$$

4. Diferenciální rovnice

- lineární difc. rovnici jako vnější model ve tvaru

  $a_n y^{(n)}(t)+\cdots+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+\cdots+b_0 u(t)$, u kauzálních systémů vždy platí podmínka fyzikální realizovatelnosti $n \geq m$.
- řešením diferenciální rovnice je časový průběh odezvy na vstupní signál
- metody řešení : Laplaceova transformace
- vlastní číslo λ je kořenem charakteristické rovnice a je obecně komplexní $\lambda = \sigma + j\omega$. Může nastat několik situací :
    - jednonásobné charakteristické číslo

$$y_i(t)=\begin{cases} e^{\lambda_i t}, \lambda_i \neq 0 \\ 1 \ \ , \lambda_i = 0 \end{cases}$$

    - dvojici komplexně sdružených čísel - kmitavý mód popsaný časově posunutou funkcí *sin*, resp. *cos*.

$$y_i(t)=e^{\lambda_i t}=e^{(\sigma_i \pm j\varpi_i)t}=e^{\sigma_i t}\sin(\varpi_i t+\theta_i)$$

    - pro r-násobná charakteristická čísla $\lambda_i \neq 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} y_i(t) &= e^{\lambda_i t} \\ &\vdots \\ y_{i+r-1}(t) &= \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda_i t} \end{aligned}$$

- kořeny charakteristické rovnice jsou shodné vlastními čísly matice A :

  Systém je *stabilní* pokud platí, že **Re(λ_i)=σ_i<0**, protože pak odpovídající exponenciála klesá s rostoucím časem k nule.

Systém je na *mezi stability*, pokud **Re(λ$_i$)=σ$_i$=0**

Systém je *nestabilní*, pokud **Re(λ$_i$)=σ$_i$>0**

Systém je *astatický*, pokud **λ$_i$=0**

5. Diferenční rovnice

- lineární difč. rovnici jako vnější model ve tvaru

  $a_0 y(k)+a_1 y(k-1)+\ldots+a_n y(k-n)=b_0 u(k)+b_1 y(k-1)+\ldots+b_m y(k-m)$

  stacionární sys. má a_i, b_i konstantní

  řád disk. systému : max(n,m)

- řešením diferenční rovnice je časový průběh odezvy na vstupní signál

- metody řešení : z-transformací

Linearizace stavových rovnic

Stavová rovnice nelineárního spojitého systému :

$$\dot{\vec{x}}(t)=f(\vec{x},\vec{u},t)$$
$$\vec{y}(t)=g(\vec{x},\vec{u},t)$$

Nominální trajektorie ($u^0(t)$, $x^0(t)$, $y^0(t)$)

Rovnovážný bod $u^0(t) = 0$, $x^0(t) = x_e$ (= $f(x_e; 0) = 0$, y^0.

Odchylky od nominální trajektorie (rovnovážného bodu = ekvilibrium) :

$$\vec{x}(t)=\vec{x}^0+\delta\vec{x}$$
$$\vec{u}(t)=\vec{u}^0+\delta\vec{u}$$
$$\vec{y}(t)=\vec{y}^0+\delta\vec{y}$$

Funkce *f* a *g* rozvineme v øadu v okolí bodu $x^0;u^0$:

$$f(\vec{x},\vec{u},t)=f(\vec{x}^0,\vec{u}^0,t)+\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}|_0\delta x+\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}|_0\delta u+o(\delta x,\delta u)$$
$$g(\vec{x},\vec{u},t)=g(\vec{x}^0,\vec{u}^0,t)+\frac{\partial g}{\partial\vec{x}}|_0\delta x+\frac{\partial g}{\partial\vec{u}}|_0\delta u+o(\delta x,\delta u)$$

$o(\delta u;\delta x)$ je nekoneènì malá velièina vyššího než prvního øádu. $\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}|_0, \frac{\partial f}{\partial\vec{u}}|_0, \frac{\partial g}{\partial\vec{x}}|_0\, a\, \frac{\partial g}{\partial\vec{u}}|_0$¿ derivace vektorových funkcí podle vektoru, tedy matice, pøièem¾ derivace se poèítají v bodì $x^0; u^0$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \vec{x}_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \vec{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \vec{x}_n} \end{bmatrix}_{x=x^0,\, u=u^0}$$

Stavové rovnice linearizovaného spojitého systému

$$\delta \dot{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}|_0 \delta x + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}|_0 \delta u$$
$$\delta \vec{y} = \frac{\partial g}{\partial \vec{x}}|_0 \delta x + \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}|_0 \delta u$$

Matice *A; B; C; D*

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}|_{x=x^0,\, u=u^0} \qquad B(t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}|_{x=x^0,\, u=u^0}$$
$$C(t) = \frac{\partial g}{\partial \vec{x}}|_{x=x^0,\, u=u^0} \qquad D(t) = \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}|_{x=x^0,\, u=u^0}$$

Př.

Stavové rovnice kyvadla

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{aligned}$$

Rovnovážné body

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 0 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 &= 0, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = k\pi \end{aligned}$$

Linearizované rovnice $\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$

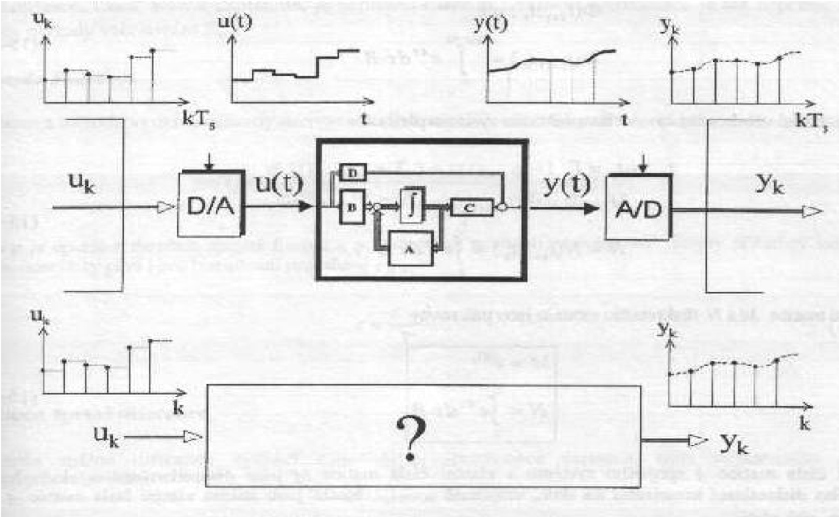
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}(-1) & 0 \end{bmatrix}_{x_1=2k\pi}, \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}(+1) & 0 \end{bmatrix}_{x_1=(2k+1)\pi}$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1) = \lambda^2 + g/l = 0, \quad \text{pro} \quad x_1 = 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{g/l}$$
$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2) = \lambda^2 - g/l = 0, \quad \text{pro} \quad x_1 = 2(k+1)\pi \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g/l}$$

Diskretizace

Diskretizace spočívá v převedení množiny T, která v případě spojitých systémů obsahuje reálné čísla, na množinu T', která bude obsahovat jen celá čísla. Požadavkem při diskretizaci je stejná odezva na vstupní signál (diskrátní a spojitý systém musí mít stejnou nebo alespoň velmi podobnou odezvu).



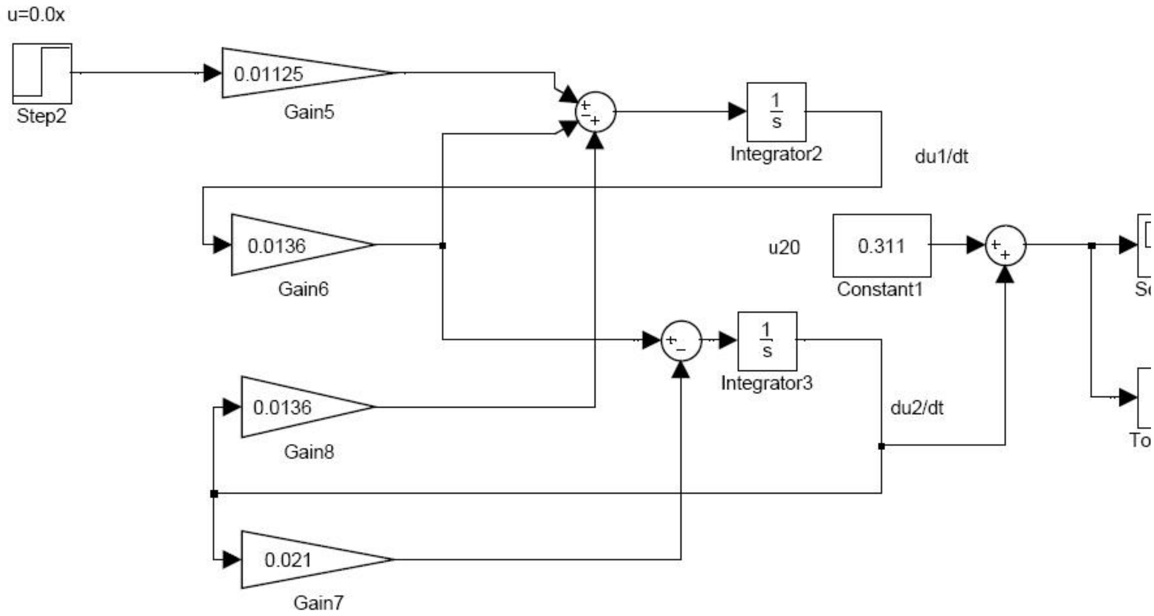
Obr. 15.1 Blokové schéma vzorkovaného systému

- Diskretizace ve stavovém popisu : $\boldsymbol{M} = e^{A*T_s}$, $\boldsymbol{N} = \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau * \boldsymbol{B}$ (hledání matic **M**,**N**)

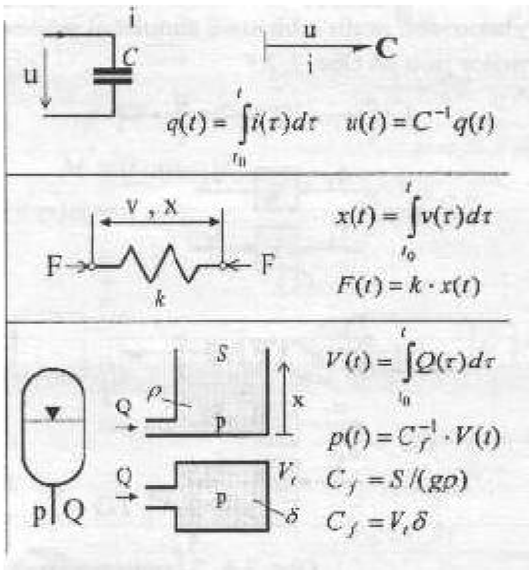
- Metody přibližné diskretizace : diskretizace z přenosu
  - Eulerova : $s \approx \frac{z-1}{T_s}$
  - Zpětná diference : $s \approx \frac{z-1}{z*T_s}$
  - Tustinova : $s \approx \frac{2}{T_s} * \frac{z-1}{z+1}$
  - výpočet : do přenosu (vyjádřeného pomocí <u>s</u>) dosadíme za <u>s</u> jeden z přidližných vzorců a přenos (teď s <u>z</u>) upravíme do požadovaného tvaru
  - vlastnosti
    - přesnost aproximace : nepřímo úměrná hodnotě T_s
    - musí být splněna vzorkovací věta

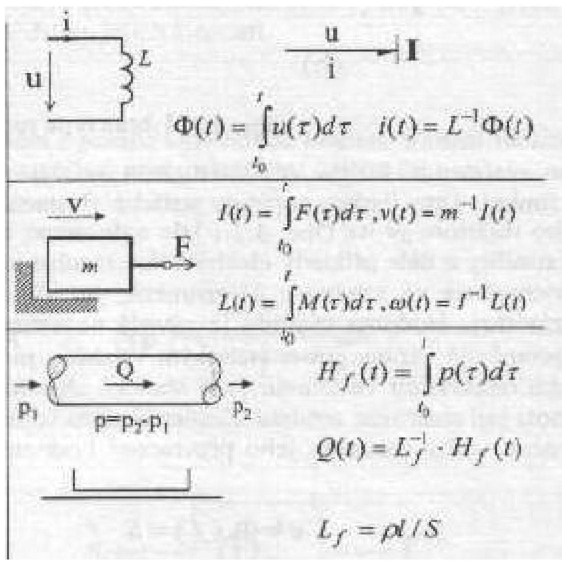
Simulace

Simulace modelů systémů provádíme v Simulinku Matlabu. Kde překreslíme stavové rovnice na simulační schéma nebo použijeme přímo vypočtený přenos. Náročnost simulace je individuální.



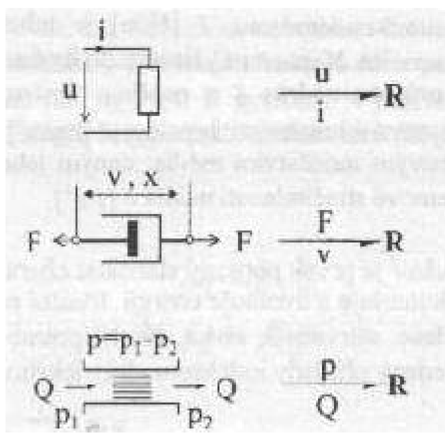
Analogie mezi systémy různé fyzikální podstaty





Analogie u indukčních prvků- L

Jak je vidět na obrázkách induktory, capacitory a odpory nejsou jen v elektrotechnice, ale i v mechanice atd. Proto je možné provádět simulace mechanických systému na systémech elektronických.



Popis obrázků :

C :

- prvky : elektrický, mechanický , hydraulický kapacitor

- veličiny : C[F] kapacita, k [N/m] tuhost pružiny, C_f [m^3/Pa] hydraulická kapacita, S průřes nádrže, g tíhové zrychlení, ρ [kg/m^3]hustota

L :

- prvky : elektrický, mechanický, hydraulický induktor
- veličiny : L [H] indukčnost, m [kg] hmotnost, I [kg*m^2] moment setrvačnosti, L_f [kg/m^4] moment hydraulické setrvačnosti

R :

- prvky : elektrický, mechanický, hydraulický induktor

Identifikace a verifikace

Cílem identifikace je nalézt co nejpřesnější matematické popis daného systému a zapsat jej do nějakého předepsaného tvaru (přenos, stav. rovnice ....).

Postup při identifikaci :

1. plánování experimentu – experimentovat s reálným systéme je náročná a drahé, proto se používá analýza odezvy systému na vstupní signál. (nejlepší odezva na jednotkový skok a dirak, ale n reálu nemožné)
2. volba struktury modelu – strukturu modelu zvolíme na základě znalostí o systému, poruchách, které na něj působí nebo podle pracovních bodů...
3. volby vhodného kritéria kvality – zvolením přesnosti, s jakou budeme chtít sestavit model
4. odhad parametrů – k odhadu parametrů systému potřebujeme znát : vstupní/výstupní data, třídu přesnosti, kritérium. Poté můžeme použít klasické metody určení parametrů :
    1. analýza přechodové a frekvenční char.(určení časových konstant, řádu systému ...)
    2. Metoda korelační a spektrální analýzy (analýza odezvy na Diracův impuls)
    3. metoda nejmenších čtverců a její modifikace
    4. metoda maximální věrohodnosti
5. test shody schování modelu a systému = verifikace – spočívá v porovnání odezev modelu a skutečného systému

Laplaceova a z- transformace

Laplaceova transformace

definice : $F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)*e^{-s*t}dt$, kde s $\in$C a fce f(t) je definována na (0, ∞) splňuje

tyto podmínky :

1. je exponenciálního řádu
2. je po částech spojitá v <0, ∞) nebo je absolutně integrovatelná :

$$\int_0^T f(t)dt=\int_0^T |f(t)|dt$$

Věty :

1. počáteční hodnota : $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} s*F(s)$
2. konečná hodnota : $\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} s*F(s)$
3. derivace fce : $L\{f^{(n)}(t)\}=s^n*F(s)-s^{n-1}*f(0)-s^{n-2}*\dot{f}(0)-...-f^{(n-1)}(0)$
4. integrace fce : $L\{\int_0^t ... \int_0^t f(\tau)d\tau...d\tau\}=F\frac{(s)}{s^n}$
5. zpoždění : $L\{f(t-T_d)\}=F(s)*e^{-s*T_d}$
6. linearity . $L\{k_1*f_1(t)\pm k_2*f_2(t)\}=k_1*F_1(s)\pm k_2*F_2(s)$

Tabulové fce :

F(s)	f(t)		F(s)	f(t)
1	δ(t)		$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	t^n*e^{-a*t}
$\frac{1}{s}$	1(t)		$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$	$\sin(\omega_n*t)$
$\frac{1}{s^2}$	t		$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos(\omega_n*t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n		$\frac{\omega_n}{(s+a)^2+\omega_n^2}$	$e^{-a*t}*\sin(\omega_n*t)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-a*t}		$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_n^2}$	$e^{-a*t}*\cos(\omega_n*t)$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t*e^{-a*t}$			

Z - transformace

definice : $F(z)=Z\{f(k)\}=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)*z^{-n}$, kde z $\in$C a f(k) je posloupnost exponenciálního řádu

definována na (0, ∞) ; f(n)=0 pro n<0

Věty :

1. počáteční hodnota : $f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$
2. konečná hodnota : $\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)*F(z)$
3. kauzalita : $\lim_{z\to\infty} F(z)=0$
4. součet řady : $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)=\lim_{z\to 1} F(z)$
5. translace vpravo : $Z\{f(k-n)\}=z^{-k}*F(z)$
6. linearity . $Z\{k_1*f_1(k)\pm k_2*f_2(k)\}=k_1*F_1(z)\pm k_2*F_2(z)$

Tabulové fce :

F(z)	f(k)		F(z)	f(k)
1	δ(k)		$\frac{z*(z+1)}{(z-1)^3}$	k^2
$\frac{z}{z-1}$	1(k)		$\frac{2*z}{(z-1)^3}$	k^2-k
$\frac{z}{z-a}$	a^k		$\frac{z}{(z-1)^k}$	$\binom{k}{n-1}$
$\frac{z}{z-1^2}$	k		$\frac{z*a^{n-1}}{(z-a)^n}$	$\binom{k}{n-1}*a^k$
$\frac{a*z}{(z-a)^2}$	$k*a^k$			

Převodní tabulka mezi Laplaceovou transformací a z-trabsformací :

	$\mathscr{F}(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1		$1,\ k=0;\ 0,\ k\neq 0$	1
2		$1,\ k=k_o;\ 0,\ k\neq k_o$	z^{-k_o}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}\right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}\right)$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}e^{-aT}z\frac{(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}\right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT-1+e^{-akT})$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-akT}(1+akT)$	$\frac{z[z(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})+e^{-2aT}-e^{-aT}+aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{z[z(b-a)-(be^{-aT}-ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos bT)}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-akT}\left(\cos bkT+\frac{a}{b}\sin bkT\right)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)[z2^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}]}$ $A=1-e^{-aT}\cos bT-\frac{a}{b}e^{-aT}\sin bT$ $B=e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}\sin bT-e^{-aT}\cos bT$