Téma 40

Jiří Cigler

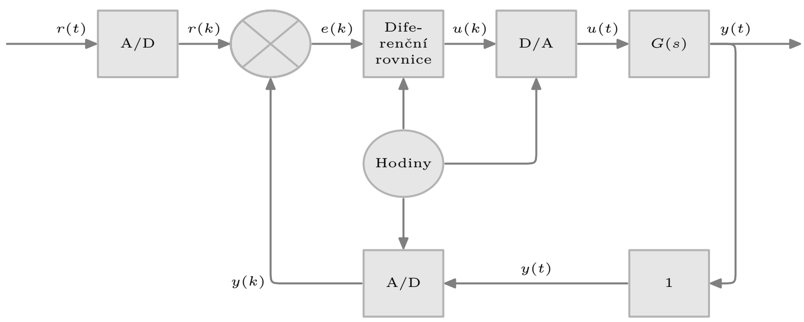
Zadání

Číslicové řízení. Digitalizace a tvarování. Diskrétní systémy a jejich vlastnosti. Řízení diskrétních systémů. Diskrétní popis spojité soustavy. Návrh emulací. Nelineární řízení. Typy nelinearit. Rovnovážné stavy a jejich stabilita. MIMO systémy a jejich vlastnosti. Řízení MIMO systémů. Systémy s dopravním zpožděním.

1 Číslicové řízení

Číslicové řízení se od doby pokroku v elektronice resp. počítačích stalo oblíbenějším, efektivnějším a levnějším přístupem k řízení, než byl analogový způsob. Mezi další výhody oproti analogovému řízení patří

- Flexibilita – jednoduché naprogramování a přeprogramování řídícího systému
- Adaptivita – metodami číslicového řízení lze navrhnout také adaptivní regulátory – tím směřuje k optimálnímu řízení.
- Rozšiřitelnost řídící jednotky – například o paměť, I/O jednotku apod.
- Vyšší odolnost na změny v okolí v porovnání s kapacitory a induktory (základními prvky analogového řízení).



Obrázek 1 Schema číslicového řízení

Podstata číslicového řízení spočívá ve vytvoření *diskrétního modelu* řízeného systému. Řízený systém může být ze své podstaty jak diskrétní (ekonomicko-manažerské

systémy) nebo spojitý (fyzikální systém) – tudíž je nutné metodami diskretizace převést jeho spojitý model na diskrétní.
Schema číslicového řízení je na obrázku **1**.

1.1 Metody diskretizace

Zabývají se převodem mezi spojitými modely a diskrétními. Všechny lze použít v Matlabu jako parametry funkce `c2d` (continuous to digital).

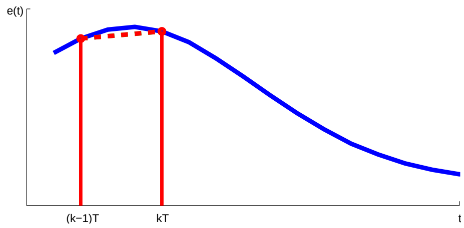
1.1.1 Tustinova metoda

K převodu mezi s-rovinou a Z-rovinou využívá bilineární transformace. Využívá lichoběžníkovou aproximaci integrálu podle obrázku **2**.

$$x(n) - x(n-1) = \frac{T}{2}\left[y(n) + y(n-1)\right] \tag{1}$$

Převedeme-li rovnici pomocí Z-transformace získáme výsledek

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \tag{2}$$



Obrázek 2 Lichoběžníková aproximace integrálu.

1.1.2 Metoda MPZ

Metoda sladěných nul a půlů (Matched zero-pole) vychází ze vztahu **3** mezi póly a nulami s a Z rovnin.

$$z_i = e^{s_i T} \tag{3}$$

1.2 Metody tvarování

Tvarování je proces, kdy se diskrétní posloupnost převede na spojitou funkci v čase (teoreticky nemusí být spojitá v hodnotách). Tomuto procesu se obvykle říká rekonstrukce signálu. I zde existuje v Matlabu funkce na převod systémů s názvem `d2c`, která má jako parametr níže uvedené metody.

1.2.1 Shannonova interpolace (Whittakerova rekonstrukce)

Je to spíše teoretická metoda a v praxi neužívaná, která ale dokáže rekonstruovat diskrétní signál na spojitý, aby byl shodný s původním spojitým.

Jeho podstata tkví v tom, že se výstupní signál konvoluje s konvolučním jádrem filtru typu dolní propust, který má mezní frekvenci rovnou polovině vzorkovací – tedy počítá se obecně z nekonečného počtu vzorků (proto se nepoužívá). Výstup popisuje rovnice 4.

$$x_2(t) = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{\sin \pi \left(t - nT\right)/T}{\pi \left(t - nT\right)/T} \tag{4}$$

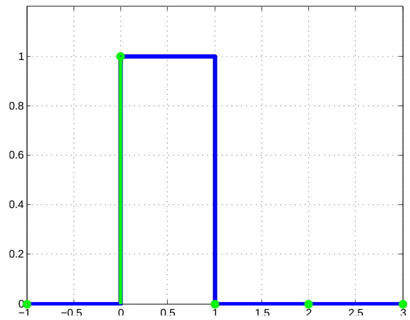
1.2.2 ZOH

Zero-order hold přidrží hodnotu vzorku po dobu vzorkovací periody. impulsní odezva je na obrázku 3. Impulsní odezvu ZOH můžeme matematicky popsat rovnicí 5

$$h_0 = \begin{cases} 1 & 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \tag{5}$$

tedy výstup pro obecný signál bude konvolucí s h_0

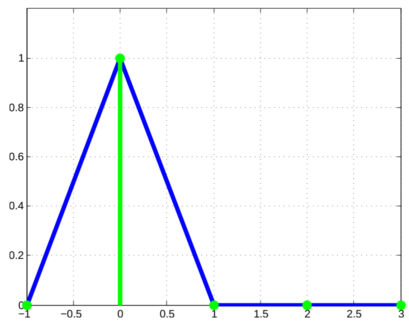
$$x_2 = x_1(n) * h_0(t) \tag{6}$$



Obrázek 3 Impulsí odezva ZOH.

1.2.3 FOH

First-order hold – jednotlivé vzorky jsou úsečkami spojeny, vzniká tak funkce složená z trojúhelníků. Impulsní odezva je na obrázku 4. Výstupní signál se počítá podobně jako u ZOH.



Obrázek 4 Impulsí odezva FOH.

1.3 Diskrétní systémy

Diskrétní systém se popisuje stavovým a vnějším popisem (přenosem). Stavový popis můžeme přejmout od spojité verze pouze nahradit derivace diferencemi a spojitý čas nahradit diskrétním časem. Stavový popis bude ve tvaru

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_\mathbf{k}$$
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{u}_\mathbf{k}$$

Z toho lze odvodit vnější popis systému.

$$C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{b(z)}{a(z)}$$
$$C(zI - A)^{-1}x_0 = \frac{c_{x_0}(z)}{a(z)}$$
$$y(z) = \frac{b(z)}{a(z)}u(z) + \frac{c_{x_0}(z)}{a(z)}$$

1.3.1 Poloha pólů a stabilita

Poloha pólů spojitých systémů ovlivňuje jejich stabilitu – záporné póly znamenaly stabilitu. Řešíme-li stabilitu diskrétních systémů, pak hledáme podobnou pomůcku jako u spojitých. Řešme otázku, kde máme hledat póly způsobující (ne)stabilitu systému – tedy kam se zobrazí hranice stability z s-roviny do Z-roviny.
Podle metody MPZ platí vztah $z_i = e^{s_i T}$. Hranicí v s-rovině je imaginární osa ($f(z) = jy$). Dosazením do vztahu dostáváme $g(z) = e^{f(z)} = e^{jy}$. Kruh o poloměru 1. Stabilní póly nalézáme uvnitř kruhu.

1.4 Návrh diskrétních regulátorů

Existuje řada metod návrhu diskrétních regulátorů. Několik z nich bude uvedeno níže.

- **Návrh emulací**
  Máme-li k dispozici spojitý popis řízené soustavy, pak je možné navrhnout spojitý regulátor a ten potom diskretizovat (například pomocí Tustinovy metody).

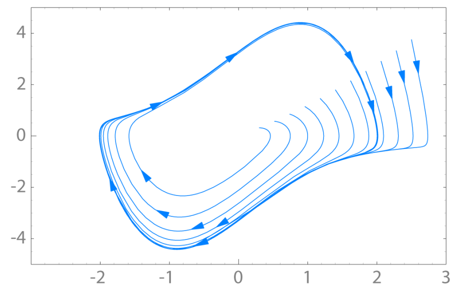
- **Diskrétní root locus**
  Root locus se zabývá polohou pólů celého systému s regulátorem v uzavřené zpětné vazbě. Je to nejrychlejší metoda, pokud pouužíváme Matlab.

- **Polynomiální metody**
  Máme-li přenos soustavy ve tvaru $G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$ a naším cílem je získání přenosu uzavřené smyčky ve tvaru podílu dvou polynomů $T(z) = \frac{b'(z)}{a'(z)}$, lze využít polynomiálních metod k získání přenosu regulátoru ve tvaru $\frac{q(z)}{p(z)}$ – nejlépe opět polynomiálního toolboxu v Matlabu.

2 Nelineární systémy

V praxi se setkáváme se situacemi, že dynamický systém, který je cílem řízení, není lineární a lze popsat pouze nelineární diferenciální (diferenční) rovnicí. Tento problém se často řeší *linearizací rovnic* pro jeden či více pracovních bodů a následným návrhem řízení pro lineární model. K nelineárním systémům se ale můžeme stavět i jinak. Nejprve se zabývejme význačnými vlastnostmi, které tyto systémy mají.

- Neplatí princip superpozice
- Mohou mít několik isolovaných ekvilibrií (rovnovážných stavů) – to lze pozorovat například u kyvadla:rovnovážná poloha je směrem dolů, ale i směrem nahoru (tzv. vratká)
- Mohou vznikat *limitní cykly*– stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávisle na počátečním stavu. Např. řešení van der Polovovy rovnice $\ddot{x} + 3(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ je na obrázku 5.
- Pro sinusový vstupní signál o frekvenci ω_0 se na výstupu nemusí frekvence ω_0 objevit, ale objeví se jiné harmonické složky sigálu.



Obrázek 5 Fázový portrét řešení van der Polovy rovnice.

K řízení nelineárních systémů lze přistupovat mnoha způsoby, jejich výčet je na `http://en.wikipedia.org/wiki/Non-linear_control#Analysis_and_control_of_non-linear_systems`.