7. Použití z-transformace a Laplaceovy transformace, přenosová funkce analogového a diskrétního obvodu

Návod na použití tohoto dokumentu

- Chcete vědět pouze nezbytné minimum, aby na vás nebyli u státnic příliš zlí?
    - Naučte se tuto první stránku.
- Chcete působit dojmem, že máte přehled a něco o tom víte?
    - Naučte se i vztahy pro dopředné transformace (zpětné transformace většinou učitelé nevyžadují umět, a když jo, tak jen mimo soutěž :-)).
    - Dále si přečtěte vysvětlující odstavce, které nejsou označeny dvojčárou, abyste získali přehled – rozhodně se je ale nějak moc neučte, zbytečné.
- Chcete působit dojmem, že vás tato otázka opravdu hodně baví?
    - Naučte se i příklady. Odstavce označené dvojčárou jsou speciálně pro vás :-) U zkoušky si nenechte skákat do řeči a trvejte na tom, že to musíte říct celé, protože je to hrozně důležité.

K čemu jsou tyto transformace dobré?

- Vycházejí z Fourierovy transformace, ale podstatně rozšiřují obor funkcí, které lze transformovat (například jednotkový skok a periodické funkce).
- Obě transformace jsou lineární, tudíž se nám s nimi dobře pracuje.
- Laplaceova transformace je pro spojité systémy, z-transformace pro diskrétní systémy, jinak jsou totožné.
- Jednoduchý popis systému – přenosová funkce (poměr obrazu výstupu ku vstupu). Stačí vynásobit vstup přenosovou funkcí a máme výstup[*].
- Řešení přechodných jevů v obvodech, řešení jejich odezvy na nejrůznější signály (přenosové charakteristiky – odezva na jednotkový impuls a na jednotkový skok – např. připojení napájecího napětí).
- Soustavy integro-diferenciálních rovnic převádějí na soustavy algebraických rovnic – jednodušší rešení obvodových rovnic s kondenzátory a induktory.
- Vyšetřování stability systému (póly musí ležet v levé polorovině p-roviny či uvnitř jednotkové kružnic z-roviny) – např. aby se nám zesilovač nerozkmital.
- Snadný přechod na Fourierovu transformaci (náhrada ‘p‘ za ‘jω‘) – určení frekvenčních charakteristik.

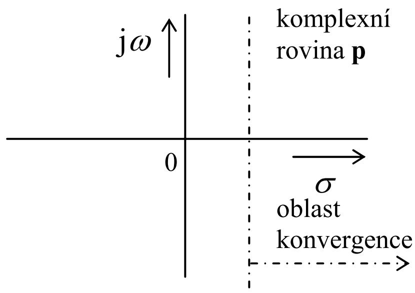
Nevýhody

- Ne vše je možno transformovat.
- Zpětná transformace bývá komplikovaná, pokud požadujeme exaktní matematické řešení.

[*] V časové oblasti bychom museli počítat konvoluční integrál či konvoluční sumu (viz příloha A) mezi vstupním signálem a impulsní odezvou systému.

Definice

Laplaceova transformace



$$\mathbf{F(p)} = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

$p = \sigma + j\omega$ (tzv. komplexní kmitočet)

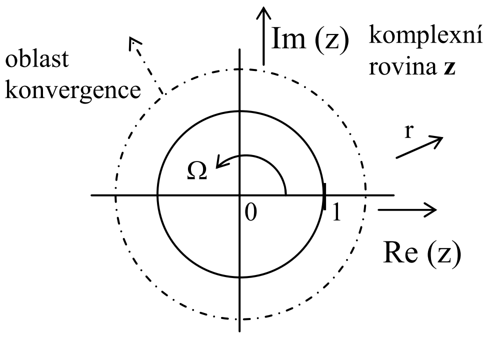
$f(t)\ldots$nejvýš polynomiální růst, pro t<0: *f(t)* = 0

Při výpočtu často nevycházíme z definice, ale používáme převodní slovník nejčastějších výrazů (viz příloha A). **F(p)** říkáme **Laplaceův obraz**.

Jedná se o komplexní funkci komplexní proměnné *p*. To znamená, že vstupem je komplexní číslo a výstupem je také komplexní číslo. Zaměříme-li se v komplexní rovině vstupního parametru *p* pouze na oblast σ = 0, získáme tím hodnoty Fourierovy transformace (to je komplexní funkce reálné proměnné ω - *úhlové frekvence*). Laplaceova transformace tedy v sobě ukrývá Fourierovu transformaci (FT). Zaměříme-li se pouze na σ = 0 a $\omega \geq 0$, získáme běžnou frekvenční charakteristiku. Uděláme-li z těchto hodnot absolutní hodnotu, získáme tím reálnou funkci reálné proměnné ω – modulovou frekvenční charakteristiku.

Postup výpočtu zpětné LT: je-li **F(p)** racionální lomená funkce, rozložíme ji na parciální zlomky. Parciální zlomky transformujeme pomocí slovníku LT a výsledek posčítáme (LT je lineární transformace). Mnohdy se jedná o komplikovanou činnost a je jednodušší přenechat ji počítači.

z-transformace



$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n}$$

$z = e^{p\cdot T_S}$, T_S je vzorkovací perioda

pro n<0: $x[n] = 0$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T_S} = \underbrace{e^{\sigma T_S}}_{r}\cdot \underbrace{e^{j\omega T_S}}_{\Omega} = r\cdot e^{j\Omega}$$

Z-transformace je diskrétním ekvivalentem Laplaceovy transformace. x[n] je navzorkovaný signál, vzniklý ze spojitého signálu takto: $x[n] = x'(n\cdot T_S)$. Levá polorovina *p* se transformuje do jednotkové kružnice *z*, pravá polorovina kružnici obklopuje.
Výpočet z-transformace je jednoduchý – máme-li navzorkovaný signál *x*[*n*], tak jedeme vzorek po vzorku a násobíme výrazem z^{-n}. Nebo můžeme použít slovníku z-transformace.

Postup výpočtu zpětné z-transformace: racionální lomenou funkci X(z) rozložíme na parciální zlomky a ty jednotlivě zpětně transformujeme pomocí slovníku.

Přenosová funkce spojitého systému, póly, nuly, stabilita

Přenosová funkce systému je poměr Laplaceových obrazů výstupu ku vstupu:

$$P(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Nuly jsou takové hodnoty proměnné *p*, které nulují čitatel *Y(p)* přenosové funkce. Póly jsou takové hodnoty proměnné *p*, které nulují jmenovatel *X(p)* přenosové funkce.

Odezva na nějaké buzení – buzení vynásobíme přenosovou funkcí, odlaplaceujeme:

$$Y(p) = X(p) \cdot P(p),$$
$$y(t) = L^{-1}\left\{Y(p)\right\}.$$

Odezva na jednotkový impuls – dosadíme jednotkový impuls, výsledek je odezva. Jinými slovy – chceme-li zjistit impulsní odezvu systému, sestavíme jeho přenos P(p) a odlaplaceujeme:

$$Y(p) = 1 \cdot P(p) = P(p),$$
$$y(t) = L^{-1}\left\{Y(p)\right\}.$$

Odezva na jednotkový skok – dosadíme jednotkový skok. Jinými slovy – chceme-li zjistit přechodovou charakteristiku systému (např. odezva obvodu na zapnutí DC napájení), sestavíme jeho přenos P(p), vydělíme péčkem a odlaplaceujeme:

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot P(p),$$
$$y(t) = L^{-1}\left\{Y(p)\right\}.$$

Frekvenční charakteristika – v přenosu P(p) náhradíme ‘p’ za ‘jω’.

Stabilita – stabilní systém na konečné buzení x(t) dává konečnou odezvu y(t):

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left|x(t)\right| < \infty \rightarrow \left|y(t)\right| < \infty \, .$$

Proto odezva na jednotkový impuls (impulsní charakteristika) musí být absolutně integrovatelná (když se zintegruje plocha pod absolutní hodnotou této odezvy, tak musí vyjít konečné číslo).

Stabilní systém – všechny póly přenosové funkce musí ležet **v levé polorovině roviny *p*** (reálná část pólů musí být záporná).

Když se totiž udělá zpětná LT přenosové funkce, vyjde nám impulsní charakteristika (odezva na jednotkový impuls, tedy $L^{-1}\{1 \,.\, P(p) = P(p)\}$). Póly se zápornou reálnou hodnotou se nám převedou na exponenciálu s exponentem záporné číslo krát čas – směrem k nekonečnu se odezva tlumí. V opačném případě by se odezva neustále zvětšovala a systém by stabilní nebyl. Póly přesně na hranici (reálná část nulová) způsobí, že se odezva nebude ani tlumit, ani zesilovat – je to hranice stability (např. zesilovač začne místo zesilování oscilovat).

Přenosová funkce diskrétního systému, póly, nuly, stabilita

Je to analogické k Laplaceově transformaci – přenosová funkce systému je poměr z-obrazů výstupu ku vstupu:

$$P(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Nuly jsou hodnoty z, které nulují čitatel, póly nulují jmenovatel.

Odezvy na buzení se počítají také obdobně, například impulsní odezvu zjistíme zpětnou z-transformací přenosu *P(z)*.

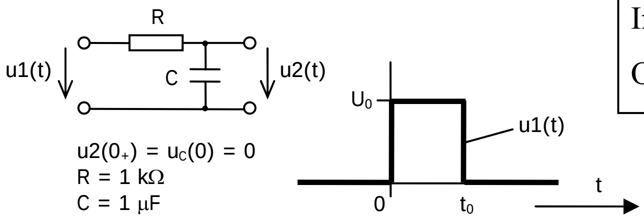
Stabilní systém – všechny póly přenosové funkce musejí být **uvnitř jednotkové kružnice z**.

Příklady (jen pro pochopení problému – u státnic vás z nich určitě zkoušet nebudou)

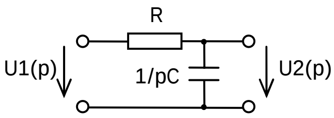
Vypočtěte průběh napětí u2(t).

Důležité vztahy
Kapacitor Z(p) = 1/(pC)
Induktor Z(p) = pL

Operátorová impedance Z(p) = U(p)/I(p)



Překreslíme a začneme počítat.



$$u_1(t) = U_0 \cdot \mathbf{1}(t) - U_0 \cdot \mathbf{1}(t - t_0)$$

$$U_1(p) = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p} e^{-pt_0} = \frac{U_0}{p}\left(1 - e^{-pt_0}\right)$$

$$P(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{RC}\frac{1}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{1000}{p + 1000}$$

Póly: p = -1000, Re{p} < 0 => systém je stabilní (póly leží v levé polorovině p-roviny).

$$U_2(p) = P(p) \cdot U_1(p) = \frac{1000}{p + 1000} \cdot \frac{U_0}{p}\left(1 - e^{-pt_0}\right)$$

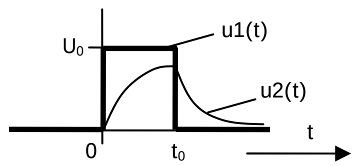
Začneme odlaplaceovávat. Je vidět, že $u_2(t)$ je rozdílem dvou stejných funkcí, druhá je posunutá v čase (viz věta o posunu v čase v příloze A).

$$u_2(t) = f(t) - f(t - t_0)$$

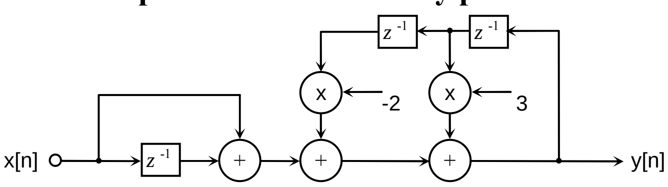
$$F(p) = \frac{1000U_0}{(p + 1000)\,p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 1000} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + 1000} \qquad \left[A = \frac{1000U_0}{(0 + 1000)} = U_0 \qquad B = \frac{1000U_0}{-1000} = -U_0 \right]$$

$$f(t) = U_0\left(1 - e^{-1000t}\right)$$

$$u_2(t) = U_0\left(1 - e^{-1000t}\right) \cdot \mathbf{1}(t) - U_0\left(1 - e^{-1000(t - t_0)}\right) \cdot \mathbf{1}(t - t_0) \text{ [V]}$$



Určete impulsní odezvu soustavy podle obrázku.



Blok z^{-1} představuje zpožďovací člen zpožďující o jeden vzorek.

Sestavíme diferenční rovnici:

$$y[n] = x[n-1] + x[n] - 2y[n-2] + 3y[n-1].$$

Impulsní odezvu $h[n]$ získáme dosazením jednotkového impulsu $\delta[n]$ na vstup $x[n]$:

$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n] - 2h[n-2] + 3h[n-1].$$

Problém – jedná se o rekurentní vztah. Proto transformujeme (dostaneme přenosovou funkci H(z)), upravíme a podle slovníku v příloze A odtransformujeme:

$$H(z) = 1 \cdot z^{-1} + 1 - 2H(z)z^{-2} + 3H(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{z^{-2}\left(z^2 - 3z + 2\right)} = \frac{z^2 + z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{-2z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

Póly: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Protože $|z_2| > 1$, tak soustava evidentně není stabilní.

$h[n] = \left(-2 + 3 \cdot 2^n\right) \cdot \mathbf{1}[n]$. Pro rostoucí n roste impulsní odezva, soustava opravdu není stabilní.

Příloha A – slovníky

Snad není potřeba umět zpaměti, spíš vědět jen pár příkladů – základ je umět alespoň obraz jednotkového impulsu a jednotkového skoku.

$\mathbf{1}(t)$ … jednotkový skok (označován také H(t) nebo η(t))

$\delta(t)$ … Diracův jednotkový impuls

Laplaceova transformace

f(t)	F(p)	
$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(p) + b \cdot F_2(p)$	linearita
$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - p^{n-2} f'(0_+) - \cdots - p^0 f^{(n-1)}(0_+)$	derivace
$\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau$	$\dfrac{F(p)}{p}$	integrál
$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{t} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$	$F(p) \cdot G(p)$	konvoluce
$f(t-t_0)$	$F(p) \cdot e^{-pt_0}$	posun v čase
$f(t) \cdot e^{at}$	$F(p-a)$	posun obrazu
$f(at),\ a > 0$	$\dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$	změna měřítka
$\delta(t)$	1	základní obrazy
$\mathbf{1}(\mathrm{t})$	$1/p$	
$e^{at} \cdot \mathbf{1}(\mathrm{t})$	$\dfrac{1}{p-a}$	
$t \cdot \mathbf{1}(\mathrm{t})$	$1/p^2$	
$\sin(\omega t) \cdot \mathbf{1}(\mathrm{t})$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\cos(\omega t) \cdot \mathbf{1}(\mathrm{t})$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	

z-transformace

x[n]	X(z)	
$a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$	$a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$	linearita
$x[n+1] - x[n]$	$(z-1)X(z) - z \cdot x[0]$	diference
$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=0}^{n} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	konvoluce
$x[n-n_0]$	$X(z) \cdot z^{-n_0}$	posun v „čase“
$\delta[n]$	1	základní obrazy
$\mathbf{1}[\mathrm{n}]$	$\dfrac{z}{z-1}$	
$a^n \cdot \mathbf{1}[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$	

Příloha B – pro chytré hlavy

Laplace

Podmínkou *f(t)* u Fourierovy transformace (FT) bylo, že musí být absolutně integrovatelná:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

Definiční vztah LT se dá rozepsat $\mathbf{F(p)} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}e^{-\sigma t}dt$

Jedná se tedy o FT, která je přenásobena „tlumicí exponenciálou“ $e^{-\sigma t}$. Čím větší σ, tím rychleji je *f(t)* pro $t > 0$ tlumena. Čím dále v čase, tím více je průběh zatlumen. Pro záporné časy by to naopak zesilovalo. Snahou je rozšířit obor funkcí *f(t)*, které půjdou transformovat. Proto se dohodlo, že *f(t)* pro $t < 0$ bude 0. To je pro mnoho případů v pohodě splnitelný předpoklad, protože nás většina dějů začíná zajímat od nějakého okamžiku $t = 0$ a co se dělo předtím, to nás nezajímá. Upravení funkce *f(t)* je jednoduché – stačí ji vynásobit jednotkovým skokem.

Tlumicí exponenciála nám zajistí, že mnoho funkcí, které původně absolutně integrovatelné nebyly, nyní budou. Týká se to například periodických funkcí, které pomocí FT transformovat nebylo možné, dále například jednotkový skok (který se nám přitom vyskytuje velmi často, například v přechodných jevech). Pro každou *f(t)* s maximálně polynomiálním růstem lze najít takovou hraniční hodnotu σ, že pro ni a větší σ už bude možno integrál spočítat – bude zajištěna konvergence. Pokud budeme chtít udělat zpětnou transformaci, stačí si vzít toto dostatečně velké σ a vypočítat pro něj následující integrál – jedná se opět vlastně o zpětnou FT, kde akorát funkci přenásobíme tentokrát „zesilující exponenciálou“, abychom získali původní funkci *f(t)*. Pro toto zvolené σ „projedeme” hodnoty ω od -∞ do ∞. Výsledek nesmíme zapomenout přenásobit jednotkovým skokem, protože pro t<0: *f(t)* = 0.

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\{\mathbf{F(p)}\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \mathbf{F(p)}e^{pt}dp \cdot \mathbf{1}(t)}$$

Zpětná Laplaceova transformace

Můžeme se setkat s jiným zápisem Zpětné LT, vycházejícím z reziduové věty – meze mohou být kladně orientovaná uzavřená křivka *C*, která obepíná všechny póly funkce v komplexní rovině *p*. Neintegrujeme pak po přímce rovnoběžné s imaginární osou, ale po uzavřené křivce. Matematicky lze ukázat, že pokud mají všechny póly reálnou souřadnici σ menší než námi zvolená σ, pak jsou oba postupy ekvivalentní.

Zpětná z-transformace

Je definována vztahem, vycházejícím z reziduové věty:

$$\boxed{x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}dz \cdot \mathbf{1}[n],}$$

kde C je jednoduchá uzavřená a kladně orientovaná křivka ležící v oblasti konvergence a obklopující počátek. Výsledek je násoben jednotkovým skokem, aby pro n<0: $x[n] = 0$.

Literatura

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 2, 1998.
[2] Hrdina, Z., Vejražka, F.: Signály a soustavy.
[3] X31EO2B, Zemánek, I.: Zápisky z přednášek a cvičení.

Za případné chyby se omlouvám, věcné připomínky mi napište, budu rád a pokusím se dokument vylepšit.

Tomáš Bořil, borilt@gmail.com, ICQ 155987793.