20 Signály, jejich vyjádření v časové a kmitočtové oblasti. Korelační funkce determinovaných a náhodných signálů a její aplikace. Vzorkování signálů a interpolace.

1 Signály

Signál $s(t)$ definujeme ako závislosť veličiny s na čase t. Signály delíme na viacero druhov. Prvé delenie sa týka ohraničenia na časovej ose (finitné vs. infinitné). Typickým príkladom časovo nekonečného signálu je periodický signál. Signály môžu byť reálne alebo komplexné, dôležitejšie delenie je ale na determinované (poznám časový priebeh) a náhodné (poznám len pravdepodobnosť). Náhodné signály sa spracovávajú štatisticky.

Posledné delenie (ešte dôležitejšie :)) sa týka analógových a digitálnych signálov. V definičnom obore a v obore hodnôt môžeme mať spojité alebo diskrétne hodnoty. Vzniknú tak signály v spojitom čase, v diskrétnom čase (vplyp vzorkovania), so spojitým oborom hodnôt a s diskrétnym oborom hodnôt (vplyv kvantovania). Analógové signály sú spojité na obidvoch osách, digitálne sú diskrétne na obidvoch osách.

1.1 Vyjadrenie signálov v časovej oblasti

V časovej oblasti (doméne) je signál reprezentovaný svojím časovým priebehom $s(t)$. Okrem neho sa používajú rôzne parametre, tie hlavné tu vymenujem. Do časovej domény patrí aj korelačná funkcia, v zadaní je jej priložená väčšia váha preto bude v samostatnej kapitole. Definície pre spojité a diskrétne signály píšem v jednom riadku vedľa seba.

1.1.1 Determinované signály

Energia Jeden z parametrov signálu je jeho energia. Nie je to vždy energia vo fyzikálnom zmysle. Signály s konečnou hodnotou energie nazývame energetické signály.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \ ; \quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |s(k)|^2 \tag{1}$$

Výkon Pre signály s nekonečnou energiou sa definuje výkon signálu. Signály s nenulovým výkonom nazývame výkonové. Patria sem napríklad všetky periodické signály, pre ktoré treba ale brať limity vo vzťahoch s rezervou - v ich prípade sa integruje a sumuje cez jednu periódu.

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt \ ; \quad P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |s(k)|^2 \tag{2}$$

Stejnosmněrná složka SS je parameter výkonového signálu. Prakticky je to hodnota, okolo ktorej sa signál mení (v prípade elektrického signálu sa dá odfiltrovať kondenzátorom).

$$s_{ss} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)dt \ ; \quad s_{ss} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} s(k) \tag{3}$$

Efektívna hodnota je konštantný signál, ktorý má rovnaký výkon ako pôvodný signál $s(t)$ (fyzikálne sa definuje cez rovnaké tepelné účinky).

$$s_{rms} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt} \ ; \quad s_{rms} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |s(k)|^2} \tag{4}$$

1.1.2 Náhodné signály

Oblasti náhodných signálov by som sa chcel dotknúť čo najmenej, na skúške z nej dostalo otázku len málo ľudí. Náhodný signál popisujeme v každom časovom okamžiku hustotou pravdepodobnosti (predpokladajú sa znalosti z M4B :)).Jeho základnými pravdepodobnostnými charakteristikami sú stredná hodnota $E[x(t)]$, rozptyl $var[x(t)]$ a stredná kvadratická hodnota $E[x^2(t)]$. Špeciálnejšie charakteristiky sú autokorelačná a autokovariančná funkcia.

Konkrétny časový priebeh (konkrétna realizácia) náhodné signálu je determinovaný a má preto podobné charakteristiky - stredná stejnosměrná složka, stredný časový výkon, stredná časová autokorelačná funkcia.

Dôležitými podskupinami náhodných signálov sú stacionárne a ergodické signály. Stacionárne môžu byť v širšom zmysle (stredná hodnota a autokovariančná funkcia závisia len na rozdiele časových okamžikov) alebo v užšom zmysle (hustota pravdepodobnosti je invariantná voči voľbe počiatku časovej osi. Signál, ktorého určitá časová charakteristika má nulový rozptyl, nazývame ergodický voči tejto charakteristike. A ak je zároveň stacionárny aj ergodický, nazýva sa striktne ergodický.

1.2 Vyjadrenie signálov vo frekvenčnej oblasti

Vyjadriť signál vo frekvenčnej doméne matematicky znamená určiť jeho rozklad na ortogonálne zložky (ortogonálne funkcie majú nulovú vzájomnú energiu - tvoria ortogonálny systém). Význam pre signály majú harmonické funkcie, buď sinus/cosinus alebo komplexná exponenciála, pretože sú vzhľadom k lineárnym sústavám invariantné (ak je na vstupe lineárnej sústavy harmonický signál, na výstupe bude na 100% tiež).

"Prakticky"je signál reprezentovaný svojim spektrom $S(\omega)$, $S(n)$, ktoré je vždy komplexné. Prechod medzi signálom a jeho spektrom prebieha aplikovaním určitého druhu Fourierovej transformácie. Okolo spektier je dosť veľa poznatkov, na ktoré sa učitelia s obľubou pýtajú. Tie najdôležitejšie sa pokúsim vymenovať.

1.2.1 Determinované signály

V tomto výpise sú uvedené konkrétne typy transformácií prislúchajúcich k druhom signálu + základné vlastnosti spektra.

1. Spojitý periodický signál → FS - Fourierov rad, diskrétne neperiodické spektrum
   - Dopredná transformácia ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$)
   $$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{I_{per}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \ ; \quad n \in Z \tag{5}$$
   - Spätná transformácia
   $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \ ; \quad \forall t \in R \tag{6}$$
2. Spojitý neperiodický signál → FT - Fourierová transformácia, spojité neperiodické spektrum
   - Dopredná transformácia
   $$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{7}$$
   - Spätná transformácia
   $$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{8}$$
3. Diskrétny periodický signál → DFS - Diskrétny Fourierov rad, diskrétne periodické spektrum
   - Dopredná transformácia ($\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$)
   $$c_n = \frac{1}{N_0} \sum_{I_{per}} s(k) e^{-jn\Omega_0 k} \ ; \quad n = n_0, \ldots, n_0 + N_0 - 1 \tag{9}$$
   - Spätná transformácia
   $$s(k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N_0-1} c_n e^{jn\Omega_0 k} \ ; \quad \forall k \in Z \tag{10}$$
4. Diskrétny neperiodický signál → DTFT - Fourierová transformácia v diskrétnom čase, spojité periodické spektrum
   - Dopredná transformácia
   $$S(\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} s(k) e^{-j\Omega k} \tag{11}$$

- Spätná transformácia

$$s(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} S(\Omega)e^{j\Omega k}d\Omega \qquad (12)$$

5. Numericky spracovávaný signál → DFT - Diskrétna Fourierová transformácia, diskrétne periodické spektrum

   - V tomto prípade sa nejedná o zvláštny druh signálu, ale o prístup používaný v digitálnom spracovávaní signálov. Aby počítač mohol počítať spektrum bežne navzorkovaného signálu, musí byť použitá suma (nie integrál) a musí pracovať s konečným počtom hodnôt. Preto je definovaná DFT. Formálne je takmer zhodná s diskrétnym Fourierovým radom, preto aj výsledok zodpovedá diskrétnemu periodickému signálu. FFT - Rýchla Fourierová transformácia je algoritmus, ktorý výrazne zrýchluje výpočet DFT.
   - Dopredná transformácia (N - počet vzoriek spracovávaného signálu)

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \;;\quad n = 0,\ldots,N-1 \qquad (13)$$

   - Spätná transformácia

$$s(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)e^{jnk\frac{2\pi}{N}} \;;\quad k = 0,\ldots,N-1 \qquad (14)$$

Už teraz je tu príliš veľa vzťahov a je otázne či treba všetky definície naozaj presne vedieť. Pre transformácie platí kopa viet, nechcem tu ale vypisovať celé skriptum, preto ich len vymenujem a pokusim sa jednoducho vysvetliť.

- Linearita - ak signály sčítame alebo násobíme konštantou, vo frekvenčnej oblasti sa so spektrom stane presne to isté.
- Modulačná veta (posun v spektre) - násobenie komplexnou exponenciálou znamená posun spektra po frekvenčnej ose.
- Posun v čase - analogicky keď sa signál posunie v čase, jeho spektrum sa prenásobí komplexnou exponenciálou.
- Konvolúcia - násobenie signálov spôsobuje konvolúciu medzi spektrami, násobenie spektier spôsobuje konvolúciu medzi signálmi (bacha je tam ešte konštanta $\frac{1}{2\pi}$).
- Obraz derivácie/integrálu - pri derivovaní signálu sa spektrum násobí, pri integrovaní delí $j\omega$.
- + ďalšie zložitejšie vety, ale to už odkazujem na skriptá - zmena mierky, obrazy komplexne združeného/párneho/nepárneho signálu, Parsevalova veta, symetria doprednej a spätnej transformácie.

Nakoniec by asi bolo vhodné poznať spektrá najdôležitejších signálov. Súto dvojice, medzi ktorými platí prechod obojstranne (z dôvodu okrajovo spomenutej symetrie). Nepíšem presné vzťahy (väčšinou sa v nich vyskytuje $\frac{1}{2\pi}$ alebo $\frac{1}{N-1}$), proste len vymenujem prislúchajúce dvojice. Všeobecne sa dá povedať, že čím užší signál, strmšie hrany, tým širšie spektrum.

- harmonický funkcia - dvojica diracových impulzov (orientácia závisí na funkcii)
- obdĺžnik - vzorkovacia funkcia $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$
- Gaussova krivka - Gaussova krivka
- jednostranný prípad: konštantný signál - diracov impulz na nulovej frekvencii

1.2.2 Náhodné signály

Vo frekvenčnej doméne sú dve základné charakteristiky náhodného signálu. Spektrálna hustota pravdepodobnostného výkonu $S(\omega)$ vyjadruje rozdelenie strednej kvadratickej hodnoty v spektre a vznikne Fourierovou transformáciou pravdepodobnostnej autokorelačnej funkcie. Stredná spektrálna hustota časového výkonu je druhá z nich.

2 Korelačná funkcia

Veľmi nerozumiem, prečo je korelačnej funkcii v otázke venovaná špeciálna pozornosť. Je to ďalšia charakteristika signálu, podobne ako energia či výkon, a poznám, síce dôležité, ale iba jedno jej praktické využitie (hoci je dosť možné že sa mýlim).

Keď sa niekde použije slovo korelácia, znamená to vzájomnú súvislosť. Ak sú dva signály v korelácii, majú pravdepodobne podobné časové priebehy. Rozlišuje sa vzájomná korelačná funkcia (medzi dvoma signálmi) (15), a autokorelačná funkcia (16). Definícia platí pre energetické signály, výkonové obsahujú limitu podobne ako pri definícii výkonu.

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau)s_2^*(t)dt \ ; \quad R_{12}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k+\tau)s_2^*(k) \tag{15}$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)s^*(t)dt \ ; \quad R(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k+\tau)s^*(k) \tag{16}$$

Korelačná funkcia neurčuje signál jednoznačne, neobsahuje totiž informáciu o posunutí (fázi) a nedá sa teda použiť k rekonštrukcii signálu. Funkčná hodnota v nule je rovná energii. Autokorelačná funkcia má cez Fourierovú transformáciu súvislosť s výkonovým spektrom $|S(\omega)|^2$. Pre náhodné signály sa definuje ešte stredná časová autokorelačná funkcia, tú tu uvádzať nebudem.

Čo ale uvediem, je tzv. pravdepodobnostná autokorelačná funkcia. Tá totiž predstavuje niečo úplne iné - vyjadruje závislosť hodnôt náhodného signálu v dvoch časových okamžikoch (E je operátor pre pravdepodobnostnú strednú hodnotu).

$$B_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \tag{17}$$

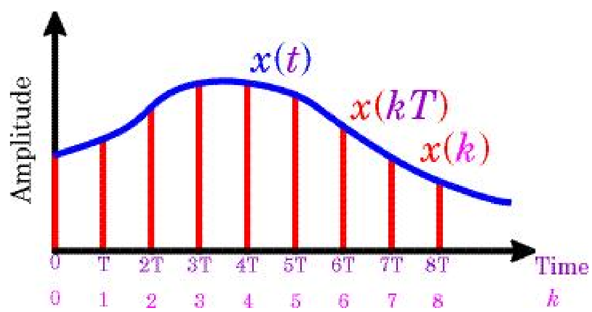
Spomínané použite súvisí s pseudonáhodnými postupnosťami, ktoré využíva technológia rozprestreného spektra. Autokorelačná funkcia takejto postupnosti je veľmi ostrá (diracov impulz) - jej spektrum je potom veľmi široké a po vynásobení signálu s ňou sa toto spektrum rozprestrie do šírky a dostane až pod úroveň spektrálnej výkonovej hustoty šumu. Na prijímacej strane sa ostrosť využije na spätnú identifikáciu postupnosti a signál sa "rozkóduje". Tento princíp používajú napríklad systémy GPS a UMTS. UMTS môže použiť rôzne postupnosti (s čo najmenšou koreláciou) na oddelenie kanálov - potom hovoríme o tzv. kódovom multiplexe CDMA, to už je ale iný príbeh.

3 Vzorkovanie a interpolácia

Obľúbená otázka učiteľov. Vzorkovanie a rekonštrukcia signálu sú dobre matematicky popísané, je ale rozdiel medzi týmto popisom a realizáciou v obvodoch. Celá problematika sa viaže na prevod medzi spojitým a diskrétnym signálom, tj. medzi neperiodickým a periodickým spektrom.

3.1 Vzorkovanie

Vzorkovanie je proces pri ktorom zo signálu spojitého v čase vzniká signál diskrétny v čase. V časovej oblasti sa signál vynásobí periodicky sa opakujúcim diracovým impulzom (využíva sa jeho vzorkovacia vlastnosť). Dôležitý parameter - vzorkovacia perióda T_{vz} respektíve vzorkovacia frekvencia f_{vz}. Spektrum opakujúcich sa diracových impulzov sú také isté opakované diracove impulzy (frekvencia je zachovaná). V konvolúcii s pôvodným spektrom v základnom pásme tak dostaneme periodicky opakované spektrum (novo vzniknuté pásma sú na frekvenciách $\ldots, -2f_{vz}, -f_{vz}, f_{vz}, 2f_{vz}\ldots$).



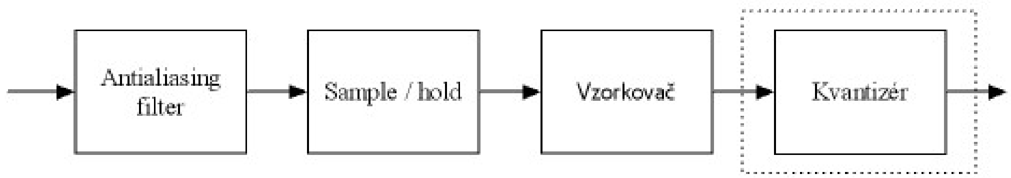
Obrázok 1: Vzorkovanie

Teraz je vhodný čas uviesť jednu veľmi dôležitú vetu :) - vzorkovací teorém. V ďalšej časti sa bude písať, že interpolácia ako opačný proces spočíva vo vytvorení pôvodného spektra, jeho periodické opakovania sa teda budú musieť potlačiť. Nutné ale je, aby tieto periódy do seba nezasahovali (nastal by tak tzv. aliasing) a rekonštruované spektrum by bolo poškodené. Keďže perióda je f_{vz}, musia jednotlivé "laloky"zasahovať maximálne do polovice medzi dvoma periódami, čo dáva známu Shannon-Koteľnikovovu podmienku.

$$f_{vz} \geq 2f_{max} \tag{18}$$

Veľkosť vzorkovacej frekvencie musí byť minimálne dvojnásobná oproti maximálnej frekvencii obsiahnutej vo vzorkovanom signále. V praxi sa volí dostatočná rezerva, nedajú sa totiž zostrojiť filtre s ideálne strmou charakteristikou.

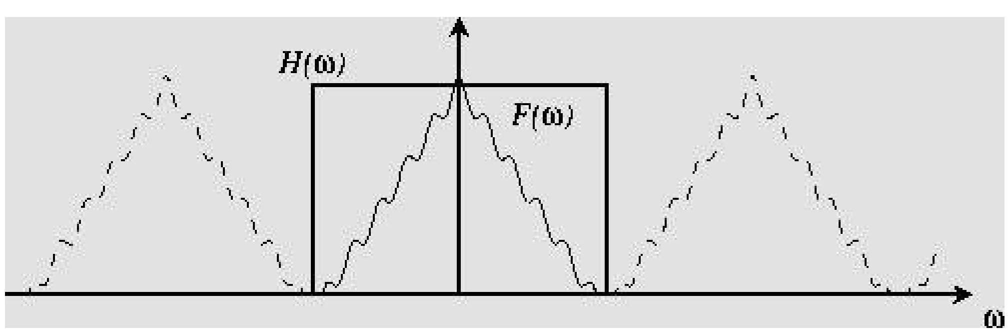
Obvody určené na tento proces sa nazývajú A/D prevodníky (analog to digital). Používajú sa viac-menej iba integrované obvody, pričom prevádzajú rovno aj kvantovanie. Antialiasingový filter je dolná priepusť, slúži na dodržanie vzorkovacieho teorému. Sample/hold obvod má za úlohu podržať konštantnú úroveň signálu dostatočne dlho, aby ju vzorkovač stihol vyhodnotiť. A/D prevodníky poznáme napríklad integračné, aproximačné, paralelné či z audio techniky známe prevodníky so Sigma-Delta modulátorom. Pri výbere idú proti sebe dva hlavné parametre - vzorkovacia frekvencia a rozlíšenie (počet bitov na kvantovanie).



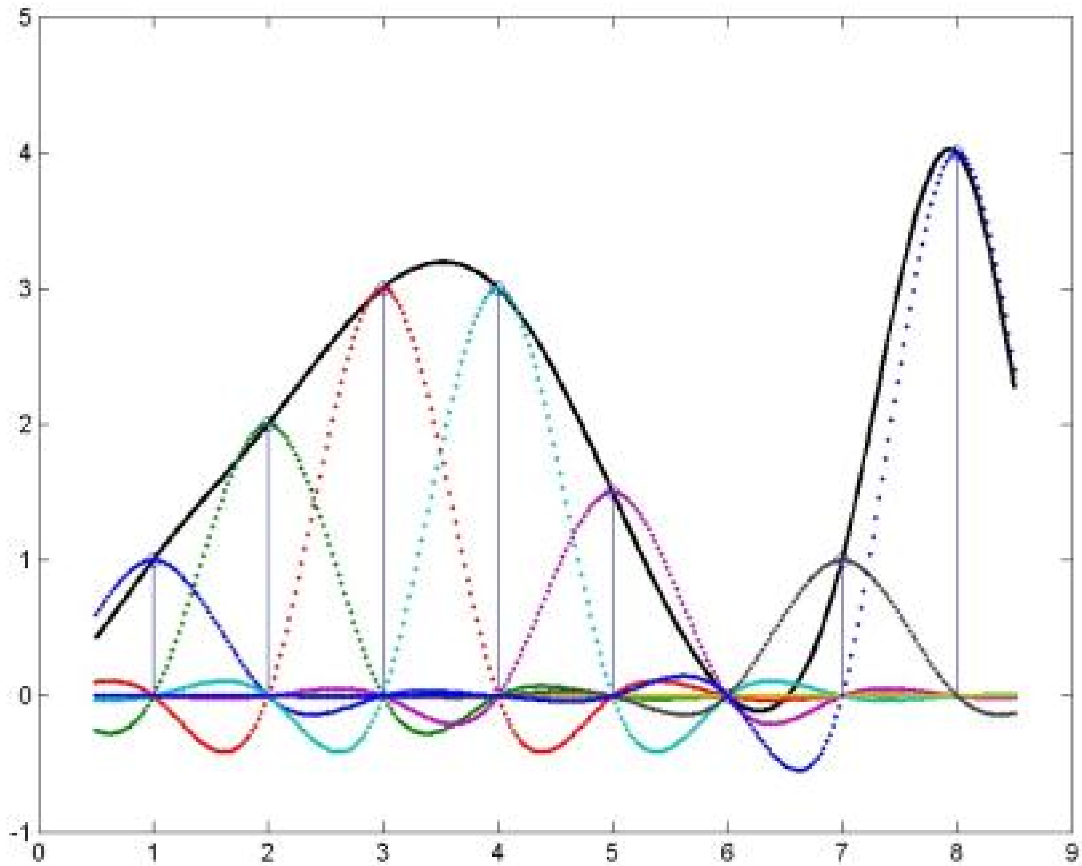
Obrázok 2: Schéma A/D prevodníku

3.2 Interpolácia

Interpolácia ako opozitný proces k vzorkovaniu rekonštruuje spojitý signál z jeho vzoriek. Z periodického spektra musíme vytiahnuť len základnú časť - použijeme teda filter typu dolná priepusť. Spektrum sa vynásobí obdĺžnikom, v časovej oblasti to predstavuje konvolúciu s vzorkovacou funkciou $Sa(x)$. Obvod sa nazýva D/A prevodník a schéma bude analogická, kresliť ju nebudem. Princíp je vytvoriť z číselných vzoriek úzke impulzy (čo najpodobnejšie diracovým) a pustiť ich do spomínaného filtru.



Obrázok 3: Interpolácia vo frekvenčnej doméne



Obrázok 4: Interpolácia v časovej doméne