Vypracoval: Pája a Vesky

Otázka číslo 21.

Zadání: Lineární časově invariantní soustava, systémová funkce. Spektrální reprezentace lineárních časových invariantních soustav, přenosová funkce

---

Signál je libovolná veličina závislá na čase.
Soustava je jakýsi BB(black box), který má nějaký vstupní(budící) signál *x(t)* a výstupní signál(odezva) *y(t)*. Může být spojitá, diskrétní a smíšená.

Kauzalita

Soustava je kauzální, pokud $x(t)=0 \quad \forall t<t_0 \quad \Rightarrow \quad y(t)=0 \quad \forall t<t_0$. To znamená, že pokud je soustava kauzální, odezva nemůže nastat dříve, než buzení.
Pokud je soustava kauzální, potom může být buď s pamětí(odezva závisí na buzení v minulosti a součastnosti), nebo bez paměti(závisí pouze na současnosti)

Nekauzální soustava: V reálném čase je fyzikálně nerealizovatelná páč umí reagovat na budoucí buzení. Příklad je ideální filtr, Postprocessing (následné zpracování signálu).

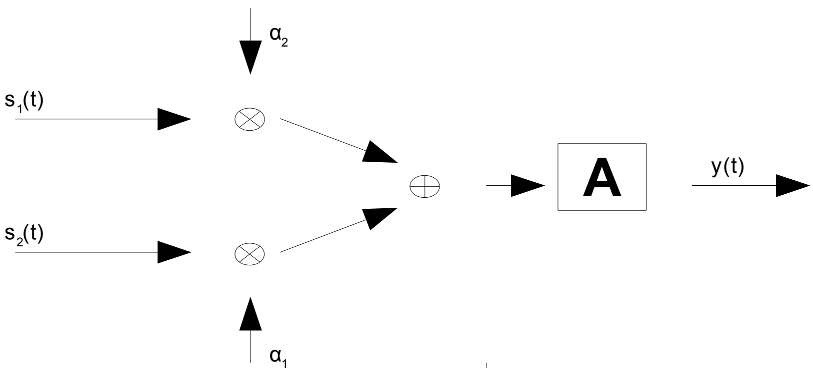
Stabilita

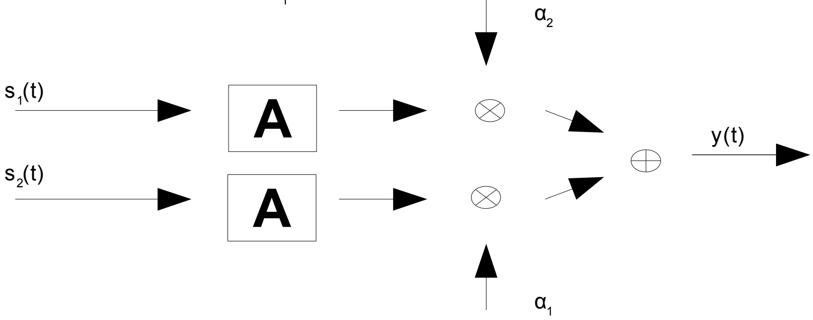
Soustava je stabilní, pokud $|x(t)|\le M(x)<\infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)|\le M(y)<0 \quad \forall t$. To znamená, že pokud je soustava stabilní, pak konečný signál nemůže vyvolat nekonečnou odezvu

Linearita

Soustava je lineární „L“, pokud platí princip superpozice tj.

$$\boldsymbol{A}\left[\sum_i \alpha_i x_i(t)\right]=\sum_i \alpha_i \boldsymbol{A}\left[x_i(t)\right]$$





Znamená to, že pokud na vstup přivedeme několik signálů $s_1(t), s_2(t), \ldots s_n(t)$, pak u lineární soustavy nezáleží na tom, jestli nejprve každý signál proženeme soustavou **A**, pak každý vynásobíme nějakou konstantou a nakonec vše sečteme, nebo nejprve každý signál vynásobíme reálným číslem, pak vše sečtem a nakonec výslednej signál proženeme soustavou **A**.

Př. Ukážeme, že soustava (umocnění na druhou) **A**: $x(t) \rightarrow y(t) = x(t)^2$ je není lineární.
Ověříme následující rovnost.

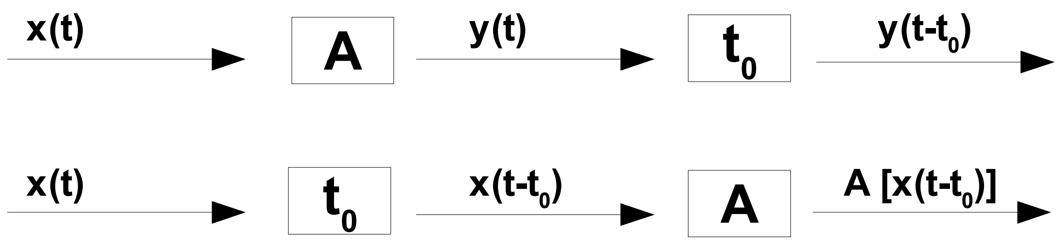
$$\left(\sum_i \alpha_i x_i(t)\right)^2 = \sum_i \alpha_i x_i(t)^2$$

A zjistíme, že neplatí už pro i=2

$$(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))^2 = \alpha_1^2 x_1(t)^2 + \alpha_2^2 x_2(t)^2 + \alpha_1 \alpha_2 x_1(t) x_2(t) \neq \alpha_1 x_1(t)^2 + \alpha_2 x_2(t)^2$$

Invariance

Soustava je časově invariantní (stacionární) „TI“, pokud $\boldsymbol{A}[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$



Soustava je stacionární, pokud pro výstupní signál nezáleží na čase kdy signál prošel soustavou.

Př. Zjistíme, jestli soustava umocnění na druhou je stacionární **A**: $x(t) \rightarrow y(t) = x(t)^2$

$$\boldsymbol{A}[x(t-t_0)] = x(t-t_0)^2 = y(t-t_0)$$

Zjistili jsme, že tato soustava je stacionární

LTI soustava je soustava, která je lineární a časově invariantní.

Impulsová odezva soustavy je výstup soustavy, pokud je na vstupu diracův impuls.

$$h(t)=\boldsymbol{A}\left[\delta(t)\right]$$

Platí:

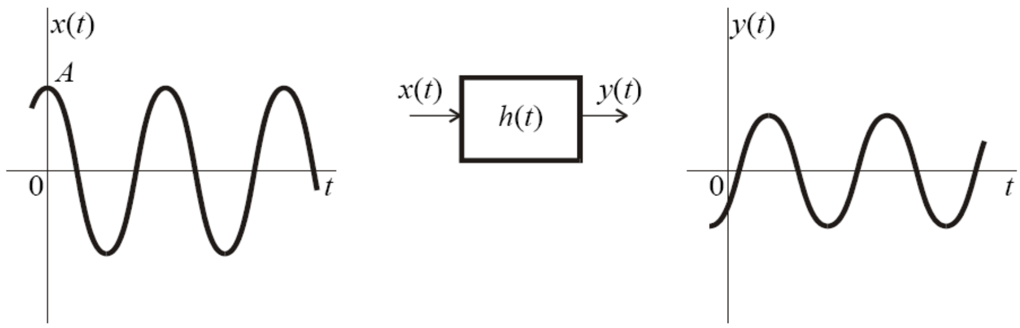
$$h(t)=0 \quad \forall t<0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Soustava je kauzální}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|<\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{Soustava je stabilní}$$

Poud je impulsová odezva funkcí pouze času, pak je soustava stacionární(nezáleží na čase kdy prošla soustavou).

Průchod harmonického signálu LTI soustavou

Odezvou LTI soustavy na harmonické buzení je opět harmonický signál shodného kmitočtu, odlišné amplitudy a fáze.



Reálný signál: $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$

Komplexní signál $x(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\Theta)}$

Odezva na obecný signál: $y(t)=h(t)*x(t)=\int_{(-\infty)}^{(\infty)} h(\tau)\cdot x(t-\tau)d\tau$

Příklad:

Komplexní signál $x = A\,\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot A\cdot \mathrm{e}^{j(\omega_0(t-\tau)+\theta)}\,d\tau =$$

$$= \underbrace{A\,\mathrm{e}^{j(\omega_0 t+\theta)}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot \mathrm{e}^{-j\omega_0\tau}\,d\tau}_{H(\omega_0)} = x(t)\cdot H(\omega_0) = x(t)\cdot\left|H(\omega_0)\right|\cdot \mathrm{e}^{\underbrace{j\arg(H(\omega_0))}_{\Phi(\omega_0)}}$$

$H(\omega) = \mathrm{F}\left[h(t)\right]$ - přenosová funkce soustavy

$\left|H(\omega)\right|$ - amplitudová charakteristika soustavy

$\Phi(\omega) = \arg\left(H(\omega)\right)$ - fázová charakteristika soustavy

Reálný signál $x(t) = A\cos(\omega_0 t+\theta) = \frac{A}{2}\left(\mathrm{e}^{j(\omega_0 t+\theta)} + \mathrm{e}^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot A\cdot\cos\left(\omega_0(t-\tau)+\theta\right)d\tau =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot \mathrm{e}^{j(\omega_0(t-\tau)+\theta)}\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot \mathrm{e}^{-j(\omega_0(t-\tau)+\theta)}\,d\tau\right) =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{j(\omega_0 t+\theta)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot \mathrm{e}^{-j\omega_0\tau}\,d\tau}_{H(\omega_0)} + \mathrm{e}^{-j(\omega_0 t+\theta)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0\tau}\,d\tau}_{H(-\omega_0)=H^*(\omega_0)}\right) =$$

$$= A\cdot\underbrace{\left|H(\omega_0)\right|}_{\text{amplitudová charakteristika}}\cdot\cos\left(\omega_0 t+\theta+\underbrace{\arg\left(H(\omega_0)\right)}_{\text{fázová charakteristika}}\right)$$

Přenosová funkce soustavy

Přenosová funkce je Fourierova transformace impulsové charakteristiky soustavy.

$$H(\omega) = F\{h(t)\}$$

Udává vztah mezi spektry odezvy a buzení.

$$Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega)$$

Přenosová funkce ve spojitém

$$H_{\mathrm{F}}(\omega) = \mathrm{F}\left[h(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt$$

a diskrétním čase

$$H_{\mathrm{F}}(\Omega) = \mathrm{F}\left[h(t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathrm{e}^{-j\Omega k}$$

Systémová funkce

Systémová funkce je laplaceův obraz implulsové charakteristiky soustavy.

$$H(p) = \mathscr{L}\{h(t)\}$$

Udává vztah mezi Laplaceovými obrazy buzení a odezvy

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

Systémová funkce ve spojitém

$$H_{\mathrm{L}}(p) = \mathrm{L}\left[h(t)\right] = \int_{0-}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-pt}\, dt$$

a diskrétním čase

$$H_{\mathrm{Z}}(z) = \mathrm{Z}\left[h(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$